บทที่ 1 เซต

Ex1 จงเขียนเซตนี้ แบบแจกแจงสมาชิก

1) A คือเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10

Sol $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ #

2) B คือเซตของจำนวนเฉพาะที่มีค่าระหว่าง 10 ถึง 30

Sol $B = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ #

3) M คือเซตของจำนวนเต็มลบ

Sol $M = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ #

Ex2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

1) เซตของสระในภาษาอังกฤษ

Sol $\{x \mid x$ เป็นสระในภาษาอังกฤษ$\}$ #

2) $P = \{-99, -97, -95, \dots, -1\}$

Sol $P = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มลบคี่ ที่มีค่ามากกว่า $-100\}$ #

Ex3 เซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นเซตว่าง

1) เซตของเดือนที่ 15 ของปี

2) เซตของจำนวนคู่ ที่ถูก 3 หารลงตัว

3) เซตของจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าน้อยกว่า ศูนย์

4) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนจริงลบที่ $x - 3 = 0\}$ #

Ex4 พิจารณา เอกภพสัมพัทธ์ของเซต ต่อไปนี้

1) $\{x \mid x \in I$ และ $x^2 + 2x - 3 = 0\}$ → มี U เป็น I (จำนวนเต็ม) #

2) $\{x \mid x^2 + 7x - 1 = 0\}$ → มี U เป็น R (จำนวนจริง) #

Ex5 เซตต่อไปนี้ เป็นเซตที่เท่ากัน หรือไม่เท่ากัน ?

1) ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, b\}$ สรุปว่า $A = B$

เพราะ b ซ้ำกัน

Note: เราไม่เขียน $\{a, b, c, b\}$ เรานิยมเขียน $\{a, b, c\}$ มากกว่า #

2) ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \in I$ และ $0 < x < 5\}$ สรุปว่า $A = B$ #

3) ให้ A เป็นเซตของ ตัวอักษรในคำว่า "reef"

ให้ B ——————— "erf"

ให้ C ——————— "reaf"

จะเห็นว่า $A = \{r, e, f\}$, $B = \{r, e, f\}$, $C = \{r, e, a, f\}$ $\therefore A = B \neq C$ #

4) ให้ $A = \{2\}$ → จะเห็นว่า $2 \in A$

$B = \{\{2\}\}$ → ——— $\{2\} \in B$ แต่ $2 \notin B$

$\therefore A \neq B$ #

Ex6 จงพิจารณาว่าข้อความนี้ถูกต้องหรือไม่ ?

1) $2 \in \{1, \{2\}, 3, \{3\}\}$ → ☒

2) $0 \notin \{x \mid x \in R$ และ $x^2 - x = 0\}$ → ☒ เพราะ 0 เป็นคำตอบของสมการดังกล่าว

3) $\phi \in \{\phi\}$ → ☑

4) $\phi \in \{\{\phi\}\}$ → ☒

5) $2 \in \{x \mid x \in I$ โดยที่ $x^2 = 4$ และ $x^2 + x - 6 = 0\}$ ☑

Ex7 จงระบุจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ มีสมาชิก 5 จำนวน หรือ $n(A) = 5$

$B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ มี $n(B)$ = มากมาย ระบุไม่ได้

$C = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\}$ มี $n(C) = 26$ จำนวน

★ $D = \phi$ จะได้ว่า $n(D) = n(\phi) = 0$

★ $E = \{\phi\}$ จะได้ว่า $n(E) = 1$ จำนวน

$F = \{x \mid x + 11 = x\}$ → ไม่มีคำตอบของสมการ ∴ $n(F) = 0$ ไม่มีสมาชิกของเซต

$P = \{x \mid 3 < x < 11\}$ เมื่อ $x \in R$ ∴ $n(P)$ = มากมาย ระบุไม่ได้

$S = \{x \mid x \in I$ และ $x^2 > 15\}$ เมื่อ $x \in R$ ∴ $n(S)$ = มากมาย ระบุไม่ได้ #

Ex8 เรื่อง SubSet

1) ให้ $A = \{2, 3, 5\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$ และ $C = \{5, 7, 9\}$

จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ∴ $A \subset B$

———— A ไม่เป็น —— B ∴ $A \not\subset C$ เพราะ $2, 3 \notin C$

———— B ——"—— C ∴ $B \not\subset C$ เพราะ $2, 3 \notin C$ #

2) ให้ $A = \{3, \{3\}, 5\}$

$B = \{3, \{5\}, 5\}$

$C = \{3, \{3\}, 5, \{5\}\}$

จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ C ∴ $A \subset C$

———— B ———— C ∴ $B \subset C$

★ แต่ ———— A ไม่เป็น ——— B ∴ $A \not\subset B$ #

★ ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset A$ → เรียก สับเซตไม่แท้ เนื่องจาก $A = B$

ถ้า $A \subset B$ แต่ $B \not\subset A$ → เรียก สับเซตแท้ ——— $A \neq B$ แต่สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ;

เช่น $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{6, 2, 4\}$ จะเห็นว่า $A = B$ ∴ ไม่เป็นสับเซตแท้

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ จะเห็นว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B เช่นกัน

Ex9 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ★ จงหาสับเซตแท้ของ A ที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว

Sol
- ▷ กรณีสับเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว ได้แก่ $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
- ▷ ———— 2 " ——— $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

∴ สับเซตแท้มี 6 สับเซต คือ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ #

Ex10 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ ★ จงหาสับเซตทั้งหมด ของ A และ B

Sol สำหรับเซต A : สับเซตของ A ที่ไม่มีสมาชิกเลย ได้แก่ ϕ

——— A ที่มีสมาชิก 1 ตัว — $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

——— A ——— 2 " — $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

——— A ——— 3 " — $\{1, 2, 3\}$

∴ สับเซตทั้งหมดของ A คือ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \phi$ รวม 8 เซตที่แตกต่างกัน (สับเซต)

★ ด้วยเหตุผลเดียวกัน

∴ สับเซตทั้งหมดของ B คือ $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$,
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \phi$ รวม 16 เซตที่แตกต่างกัน (สับเซต)

Note: ถ้า Set A มี $n(A) = 3$ จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A จะมี $2^3 = 8$ สับเซต

ถ้า Set B มี $n(B) = 4$ ———— B — $2^4 = 16$ สับเซต

คุณสมบัติที่สำคัญของสับเซต

1. $\phi \subset A$ เมื่อ A เป็นเซตใดๆ
2. $A \subset A$ "
3. $A \subset \mathcal{U}$ "
4. ถ้า $A \subset \phi$ แล้ว $A = \phi$
5. ถ้า A มีสมาชิก n ตัวแล้ว จำนวนสับเซตของ A จะมี 2^n สับเซต
6. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
7. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด และ $A \subset B$ แล้ว $n(A) \leq n(B)$

Ex11 จงยกตัวอย่าง เซต A และ B ซึ่ง $A \in B$ และ $A \subset B$

Sol สมมุติว่า $A = \{1,2\}$ ดังนั้น $\{1,2\}$ ต้องเป็น 1 ในสมาชิกของเซต B

$\therefore\ B = \{\{1,2\}, ?, ?\}$ เช่น $B_1 = \{\{1,2\}, 1\}$

$B_2 = \{\{1,2\}, 1, 2, 3\}$ เป็นต้น

Ex12 จงยกตัวอย่างเซต A, B และ C เมื่อ $A \not\subset B$, $B \not\subset C$ แต่ $A \subset C$

Sol สมมุติให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,c\}$, $C = \{1,2,3,a,b\}$

สังเกตว่า $A \not\subset B$ เพราะ $1 \notin B$

$B \not\subset C$ เพราะ $c \notin C$

แต่ $A \subset C$ เพราะ 1 และ $2 \in C$

Ex13 พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง หรือไม่ถูกต้อง

1) สับเซตของเซตจำกัด เป็นเซตจำกัด ☑
2) สับเซตของเซตอนันต์ เป็นเซตอนันต์ → ☒ ไม่เสมอไป
เช่น สับเซตของของ A เมื่อ $A = \{3,4,5,\dots\}$
อาจเป็น $C = \{13,14,15,16\}$ ก็ได้ ซึ่ง C เป็นเซตจำกัด
ไม่ใช่เซตอนันต์
3) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $A \subset B$ แล้ว B ต้องเป็นเซตจำกัด → ☒
ไม่เสมอไป เช่น $A = \{15,16,17\}$ และ $B = \{10,11,12,\dots\}$ → B เป็นเซตอนันต์ ไม่ใช่เซตจำกัด
4) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B ต้องเป็นเซตอนันต์ ☑
เช่น $A = \{\dots,-3,-2,-1\}$ และ $B = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
กรณีนี้ $A \subset B$ แน่นอนว่า A & B เป็นเซตอนันต์ ☑

Ex14 กำหนดให้ $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}, \{1,a\}, a, b, c\}$ จงพิจารณาว่า ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง

(1) $\phi \in A$ ☑ (2) $\phi \subset A$ ☑ เพราะ ϕ เป็นสับเซตของทุกเซต

(3) $\{\phi\} \in A$ ☑ (4) $\{\phi\} \subset A$ ☑

(5) $\{1\} \in A$ ☑ (6) $\{1\} \subset A$ ✓

(7) $\{a,b\} \in A$ ☒ (8) $\{\{1\}\} \subset A$ ✓

(9) $b \in A$ ☑ (10) $\{1,a,b,c\} \subset A$ ✓

Note: สังเกตว่า A มี $n(A) = 8$ จำนวนคือ ϕ, $\{\phi\}$, 1, $\{1\}$, $\{1,a\}$, a, b และ c
ดังนั้นการพิจารณาคำตอบ จากเครื่องหมาย $\in$ จึงดูไม่ยาก
แล้ว $\{(\text{สับเซตใดๆ})\} \subset A$ หลังให้พิจารณาว่า จำนวนใดๆในเครื่องหมาย { } เป็นสมาชิกของ A หรือไม่

Ex15. พิจารณาเซตต่อไปนี้

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{p, q, r\}$
$C = \{m, n, k, j\}$

เซตใดเป็นเซตที่เทียบเท่ากัน ?

ตอบ เซตที่เทียบเท่ากัน คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิก "เท่ากัน"

$\therefore$ A และ B เป็นเซตที่เทียบเท่ากัน

Ex16. พิจารณาเซต $A = \{-1, -2, -3, \dots\}$

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$ แล้ว A และ B เป็นเซตที่เทียบเท่ากันหรือไม่

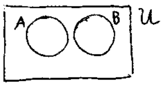
ตอบ พิจารณาการจับคู่แบบ 1-1 ของสมาชิกทุกตัวใน A และ B เป็นดังนี้

$$\begin{array}{cccc} -1, & -2, & -3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & \dots \end{array}$$

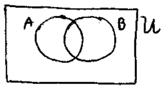
พบว่า เป็นการจับคู่แบบ 1-1 ภายใต้กฎเกณฑ์ $n \to -n$ เมื่อ $n \in I^+$

$\therefore$ A และ B เป็นเซตที่เทียบเท่ากัน

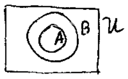
$\boxed{\text{แผนภาพของ Venn-Euler}}$ [Venn-Euler Diagram]



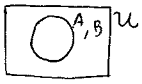
→ A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



→ A และ B มีสมาชิกร่วมกันบางส่วน



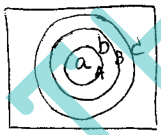
→ $A \subset B$ แต่ $A \neq B$



→ $A = B$ [$A \subset B$ และ $B \subset A$ นั่นคือ $A = B$ หรือ $B = A$]

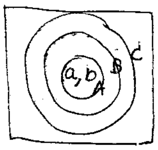
Ex17 กำหนดให้ $A \subset B \subset C$ และ $A \neq B \neq C$ โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ จงเขียนแผนภาพตามเงื่อนไขดังกล่าว

ตอบ



นั่นคือ b ต้องไม่อยู่ใน A

หรือ

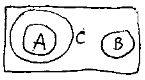


นั่นคือ b สามารถอยู่ใน A ได้

★ **Ex18** กำหนดให้ $P = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}, 3, \{3\}, \{1,3\}, \{1,3,5\}\}$ จงพิจารณาว่า ข้อใดถูกต้อง

1) $\{\{1,3\}\} \in P$ ☒ เพราะที่ถูกต้องคือ $\{1,3\} \in P$
2) $\{\{\phi\}\} \in P$ ☒
3) $\{\{\phi\}\} \subset P$ ☑ และรวมทั้ง $\{\phi\} \subset P$
4) $\{1, \{3\}\} \subset P$ ☑
5) $\{1, 3, \{3\}\} \in P$ ☒
6) $\{1, 3, 5\} \in P$ ☑
7) $\{\{1,3\}, \{1,3,5\}\} \subset P$ ☑
8) $P \subset P$ ☑
9) $\{\phi, \{\phi\}, \{1,3\}\} \in P$ ☒
10) $\{\phi, \{\phi\}, \{1,3\}\} \subset P$ ☑

Ex 19 จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือไม่ ?

1) ถ้า $A \not\subset B$ และ $B \not\subset C$ แล้ว $A \not\subset C$ → ผิด เช่น 

2) ถ้า $A \subset B$ และ $x \notin B$ แล้ว $x \notin A$ → ถูกต้อง

3) ถ้า $A \subset B$ และ $x \in A$ แล้ว $x \in B$ → ถูกต้อง

4) ถ้า $A \neq B$ และ $B \neq C$ แล้ว $A \neq C$ → ผิด → ไม่ถูกต้องเสมอไป

5) ถ้า $n(A) = 3$ และ $n(B) = 3$ แล้ว $A = B$ → ผิด → ไม่ถูกต้องเสมอไป

6) ถ้า $A = B$ แล้ว A และ B เป็นเซตที่เทียบเท่ากัน → ☑

7) ถ้า A และ B เป็นเซตที่เทียบเท่ากันแล้ว $A = B$ → ผิด → ไม่ถูกต้องเสมอไป

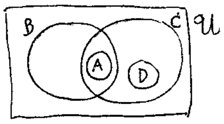
8) $\{0\} \subset \{\phi\}$ → ผิด เพราะ 0 เป็นสมาชิกใน $\{0\}$ แต่ 0 ไม่เป็นสมาชิกใน $\{\phi\}$

9) ถ้า $A \subset B \subset C$ โดยที่ $x \in B$ และ $x \notin A$ แล้ว $x \in C$ → ถูกต้อง

10) ถ้า $A \subset B \subset C$ แล้ว $n(A) < n(C)$ → $\boxed{\text{ผิด}}$ ไม่เสมอไป

Ex 20 ถ้า $A \subset B$, $A \subset C$, $B \not\subset D$ แต่ $D \subset C$ แล้ว เมื่อไม่มีสองเซตใดที่เท่ากัน จงเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์

ตอบ



การสร้างเซตใหม่จากเซตเดิม
- Intersection
- Union
- Difference and Complement

$\boxed{\text{นิยาม } A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}}$

Ex 21 ให้ $A = \{x \mid x \in I^+ \text{ และ } x < 7\}$ และ

$B = \{x \mid x \in I^+ \text{ และ } x > 8\}$ แล้ว จงหา $A \cap B$

Sol ถ้าเขียนเซตในรูปแบบการแจกแจงสมาชิกแล้ว $A = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ และ $B = \{9, 10, 11, \ldots\}$

$\therefore A \cap B = \phi$

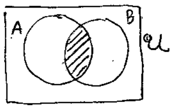
Ex 22 ให้ $A = \{x \mid x \in I^+ \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า } 30\}$

และ $B = \{18, 19, 20, 21, \ldots\}$ แล้ว จงหาค่าของ $A \cap B$

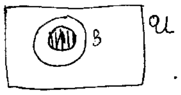
Sol หาเซตที่เหมือนกัน $A \cap B = \{31, 33, 35, \ldots\}$

Ex 23 จากแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ จงเขียนรูปแบบของ Intersection

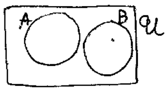
Sol



$(A \cap B) \subset A$
และ $(A \cap B) \subset B$



$A \cap B = A$ เมื่อ $A \subset B$



กรณีนี้ $A \cap B = \phi$

คุณสมบัติที่สำคัญของ Intersection

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \phi = \phi$
3. $A \cap U = A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
7. $(A \cap B) \subset A$ และ $(A \cap B) \subset B$

★ A และ B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เมื่อ $A \cap B = \phi$

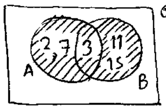
ยูเนียน - Union

> ยูเนียน ของเซต A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ A หรือของ B
> โดยที่ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$

Ex 24 กำหนดให้ $A = \{2, 3, 7\}$ และ $B = \{3, 11, 15\}$ จงหาค่าของ $A \cup B$

Sol $A \cup B = \{2, 3, 7, 11, 15\}$

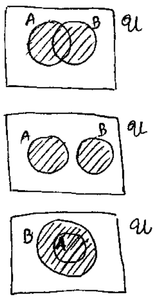
หรือมองแผนภาพได้ ดังนี้



Ex 25 ให้ $A = I^{+}$ และ $B = I^{-}$

ดังนั้น $A \cup B = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ex 26



ทั้ง 3 กรณี คือ $A \cup B$

> คุณสมบัติสำคัญเกี่ยวกับ Union
> 1. $A \cup A = A$
> 2. $A \cup \phi = A$
> 3. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
> 4. $A \cup B = B \cup A$
> 5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
> 6. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$
> 7. $A \subset (A \cup B)$ และ $B \subset (A \cup B)$

> คุณสมบัติที่สำคัญเพิ่มเติม
> 1. ถ้า $A \cup B = \phi$ จะได้ว่า $A = \phi$ และ $B = \phi$
> 2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ → เหมือนกฎ Distribution
> 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ → เหมือนกฎ Distribution เช่นกัน

Ex 27 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ และ $C = \{2, 5, 7, 8\}$ จงหาค่าของ

1) $A \cap (B \cup C)$ จะได้ $B \cup C = \{2, 5, 6, 7, 8\}$

แล้ว $A \cap \{2, 5, 6, 7, 8\} = \{2\}$

2) $(A \cup B) \cup C$ จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

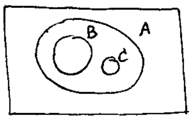
∴ $(A \cup B) \cup C$ จะได้ $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

3) จากตัวอย่างอื่นๆ เราจะพบว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

และ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ #

Ex 28 ถ้า $A \cup B = A \cup C$ แล้ว $B = C$ ใช่หรือไม่?

ตอบ ไม่ใช่! เพราะถ้า A เป็น Set ที่ใหญ่กว่า B และ C แล้ว



จากรูป $A \cup B = A \cup C$

เพราะ $A \cup B = A$ และ $A \cup C = A$

★ แต่ $B \neq C$ นะครับ **ตอบ**

ผลต่าง และ Complement

บทนิยาม ผลต่างของ A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ที่เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B

$A - B = \{x \mid x \in A$ แต่ $x \notin B\}$

Ex 29 ให้ $A = \{2,3,5,7\}$ และ $B = \{5,7,9,11\}$ แล้ว

$A - B = \{2,3\}$ ตอบ

Ex 30 ให้ $A = \{m,n,l\}$ และ $B = \{j,k,s\}$

$\therefore A - B = \{m,n,l\} = A$

Note: $A - B \neq B - A$

จากนิยามของ นั้น $B - A = \{x \mid x \in B$ แต่ $x \notin A\}$

$M - N = \{x \mid x \in M$ แต่ $x \notin N\}$

$\therefore$ ถ้าเป็น $\mathcal{U} - A = \{x \mid x \in \mathcal{U}$ แต่ $x \notin A\}$

หรือ $\mathcal{U} - A = \{x \mid x \notin A\}$

★ เรียก $\mathcal{U} - A$ ว่า A^c หรือ A' โดยที่ $A' = \{x \mid x \notin A\}$

Ex31 จาก $\mathcal{U} = \{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

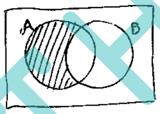
$A = \{13,17,19\}$, $B = \{12,13,15,16\}$ แล้ว

1) $A - B = \{17,19\}$
2) $B - A = \{12,15,16\}$

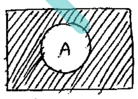
→ สังเกตว่า $A - B \neq B - A$

3) $A' = \mathcal{U} - A = \{11,12,14,15,16,18,20\}$
4) $B' = \{11,14,17,18,19,20\}$

Ex32 ตัวอย่างของ A' จากแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์



$A - B$



A'

คุณสมบัติที่สำคัญของ ผลต่าง และ Complement

1. $(A')' = A$
2. $\phi' = \mathcal{U}$
3. $\mathcal{U}' = \phi$
4. $A \cap A' = \phi$
5. $A \cup A' = \mathcal{U}$
6. ★ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
7. ★ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
8. $A - B = A \cap B'$
9. $A - B = A$ เมื่อ $A \cap B = \phi$
10. $A - B = \phi$ เมื่อ $A \subset B$

Ex33 ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ซึ่งให้เอกภพสัมพัทธ์เป็น $\mathcal{U}$ จงแสดงว่า $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Sol จาก $A - (B \cap C)$ ใช้คุณสมบัติที่ว่า $A - B = A \cap B'$

$\therefore A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)'$

จาก $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\therefore A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$ โดยที่ $A \cap B' = A - B$

$= (A - B) \cup (A - C)$ #

Ex 34 จงแสดงว่า ถ้า $A \subset B$ แล้ว $(A-B)' \cap (A \cup B) = B$

Sol
$$(A-B)' \cap (A \cup B) = \phi' \cap (A \cup B)$$
เพราะ $A \subset B$ $\therefore A - B = \phi$
$$= \mathcal{U} \cap (A \cup B)$$
$$= (\mathcal{U} \cap A) \cup (\mathcal{U} \cap B)$$
$$= A \cup B$$ โดยที่ $A \subset B$
$$= B \quad \#$$

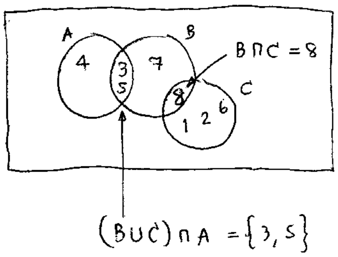
Ex 35 จากความสัมพันธ์ $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

และจาก $\longrightarrow$ $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$ #

Ex 36 ให้
$A \cup B = \{3,4,5,7,8\}$
$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8\}$
$A \cap C \neq \phi$
$B \cap C = \{8\}$
$(B \cup C) \cap A = \{3,5\}$ และ $4 \notin B$

แล้ว จงหาเซต A, B และ C

Sol เขียนแผนภาพของ เวนน์-ออยเลอร์ เพื่อช่วยหาเซตในโจทย์ดังกล่าว



$\mathcal{U}$

โดย $A \cap C = \phi$
$\therefore$ A และ C ไม่ซ้อนทับกัน
Note: 7 ไม่อยู่ใน A เพราะ $A \cup C$ ไม่มี 7

$\boxed{\text{Power Set}}$

ถ้า A เป็นเซตใดๆ Power Set ของ A คือเซตที่ประกอบด้วย สมาชิกที่เป็นสับเซตของ A ทั้งหมด

โดยที่ $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

เช่น $A = \{1,2,3\}$

สับเซตของ A $= \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

แล้ว Power Set ของ A หรือ P(A) $= \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Ex 37 ถ้า $B = \{1, \{1\}, \phi\}$ แล้ว จงหาจำนวนสมาชิกของ $P(B)$ และหา $P(B)$

Sol เซต B มีสมาชิก 3 ตัว
$\therefore$ สมาชิกของ $P(B) = 2^3 = 8$ จำนวน
และ $P(B) = \{\phi, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\phi\}, \{1,\{1\}\}, \{1,\phi\}, \{\{1\},\phi\}, \{1,\{1\},\phi\}\}$

Ex 38 ให้ $A = \{a,b\}$ และ $B = \{b,d\}$ แล้ว จงหาค่าของ $\longrightarrow$ ข้อสังเกต สังเกตว่า $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

1) $P(A \cup B)$ ซึ่ง $A \cup B = \{a,b,d\}$
$\therefore P(A \cup B) = \{\{a\},\{b\},\{d\},\{a,b\},\{a,d\},\{b,d\},\{a,b,d\},\phi\}$

2) $P(A) \cup P(B)$; $P(A) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $P(B) = \{\phi,\{b\},\{d\},\{b,d\}\}$ $\therefore P(A) \cup P(B) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,d\}\}$

3) $P(A \cap B)$ ซึ่ง $A \cap B = \{b\}$
$\therefore P(A \cap B) = \{\phi, \{b\}\}$

4) $P(A) \cap P(B)$; $P(A) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $P(B) = \{\phi,\{b\},\{d\},\{b,d\}\}$ $\therefore P(A) \cap P(B) = \{\phi, \{b\}\}$

Ex 39 ถ้า $\{1,3\} \in P(A)$ และสมาชิกทุกตัวของ $P(A)$ เป็นสับเซตของ $\{1,3\}$ แล้ว จงหา A และ $P(A)$

Sol จากที่โจทย์กำหนดว่า สมาชิกทุกตัวของ $P(A)$ เป็นสับเซตของ $\{1,3\}$ แล้ว
ดังนั้น สมาชิกของ $P(A)$ ที่อาจเป็นไปได้ ต้องเป็นสับเซตของ $\{1,3\}$ นั่นคือ
$\phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}$ รวม 4 จำนวน

ซึ่งโจทย์กำหนดให้ $\{1,3\} \in P(A)$ $\therefore$ สมาชิกทั้ง 4 จำนวนข้างต้น ต่างก็เป็นสมาชิกของ $P(A)$
$\therefore A = \{1,3\}$
และ $P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \phi\}$ ตอบ

คุณสมบัติบางประการของ Power Set

ถ้าให้ A และ B เป็นเซต เมื่อ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ แล้ว

1) $P(A) \neq \phi$ สำหรับทุกๆ เซต A
2) $\phi \in P(A)$ ——— A
3) $A \in P(A)$ ——— A
4) ถ้า A เป็นเซตจำกัดแล้ว ซึ่ง $n(A) = m$ แล้ว $n[P(A)] = 2^m$
5) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว $P(A)$ เป็นเซตอนันต์
6) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
7) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
8) $[P(A) \cup P(B)] \subset P(A \cup B)$

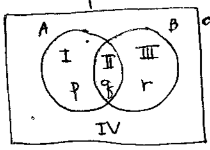
★ ถ้าจำนวนใดๆ เป็นสมาชิกของ $P(A)$ ได้ สิ่งนั้นต้องเป็นสับเซตของ A ;
เช่น $n \in P(A)$ แล้ว
$n \subset A$ เช่นกัน

Ex 40 ถ้า P และ Q เป็นเซตจำกัด โดยที่ $n(P(A \cap B)) = 8$ แล้ว จงหา $n(A)$

Sol เนื่องจาก $n(P(A \cap B)) = 8 = 2^n$ ซึ่งเป็นจำนวนสมาชิกของ Power Set
เมื่อ $8 = 2^n$ $\therefore n = 3$
แสดงว่า สมาชิกของ $A \cap B$ มี 3 จำนวน
นั่นคือ สมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และเซต B มี 3 ตัว ที่ซ้อนทับกัน
$\therefore$ เซต A ต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 3 ตัว
หรือ $n(A) \geq 3$ ตอบ

★ **จำนวนสมาชิกในแผนภาพของ เวนน์ - ออยเลอร์**

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ เราจะเขียนแผนภาพของเวนน์ - ออยเลอร์ ได้ดังนี้



ให้ p เป็นจำนวนสมาชิกในส่วนที่ I
q ——— II
r ——— III

จากภาพ $n(A) = p+q$
$n(B) = q+r$
$n(A \cup B) = p+q+r$
* $n(A \cap B) = q$
เพราะว่า $p+q+r = (p+q)+(q+r)-q$

$\therefore \boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

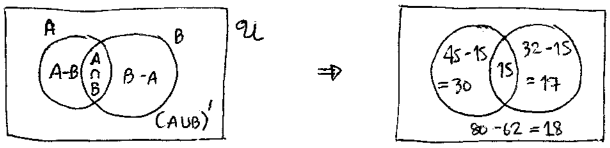
และในทำนองเดียวกัน ;

$$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C) - n(B \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

Ex 41 จากผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง ซึ่งมีจำนวน 80 คน พบว่า มีคนสอบคณิตศาสตร์ได้ 45 คน มีคนสอบภาษาอังกฤษได้ 32 คน และมีนักเรียนที่สอบได้ทั้งสองวิชาเท่ากับ 15 คน จงหาว่า

1. มีนักเรียนกี่คนที่สอบคณิตศาสตร์ได้ แต่สอบภาษาอังกฤษตก
2. ———— ภาษาอังกฤษได้ แต่สอบคณิตศาสตร์ตก
3. นักเรียนที่สอบตกทั้งสองวิชา มีทั้งหมดกี่คน

Sol เขียนภาพแสดงแผนภาพของเวนน์ - ออยเลอร์ ได้ดังนี้



แล้ว $30+15+17 = 62$

$A-B$ คือจำนวนนักเรียนที่สอบคณิตศาสตร์ได้ แต่สอบภาษาอังกฤษตก

$B-A$ ———— ภาษาอังกฤษได้ แต่สอบตกคณิตศาสตร์

$A\cap B$ ———— ได้ทั้งสองวิชา

$(A\cup B)'$ คือเซตของนักเรียนที่สอบตกทั้งสองวิชา

จาก $U = n(A-B) + n(A\cap B) + n(B-A) + n(A\cup B)'$ จะได้ $80 = 30 + 15 + 17 + n(A\cup B)'$

∴ มีนักเรียนที่สอบได้เฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ $= 45-15 = 30$ คน

———— ภาษาอังกฤษ $= 32-15 = 17$ คน

———— ทั้งสองวิชา $= A\cap B = 15$ คน

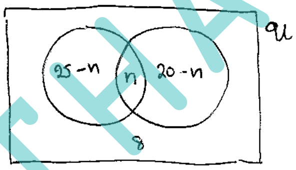
★ และจำนวนนักเรียนที่สอบตกทั้งสองวิชา $= n(A\cup B)' = 80-62 = 18$ คน

ตอบ

Ex 42 ห้องเรียนห้องหนึ่งมี 45 คน ปรากฏว่ามี 8 คนที่ไม่เล่นกีฬาใดๆ เลย มี 25 คนเล่นฟุตบอล และมี 20 คน เล่นวอลเลย์บอล จงหาว่า จำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาแต่ละชนิดเพียงอย่างเดียว และจำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาทั้งสองชนิด มีอย่างละกี่คน

Sol สมมุติให้ นักเรียนที่เล่นกีฬาทั้งสองชนิด มี n คน

เขียนภาพแสดงแผนภาพเวนน์ - ออยเลอร์ ได้ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า

$U = n(A-B) + n(A\cap B) + n(B-A) + n(A\cup B)'$

$45 = (25-n) + n + (20-n) + 8$

$45 = 25 - \cancel{n} + \cancel{n} + 20 - n + 8$

$45 = 53 - n$

∴ $n = 53 - 45 = 8$

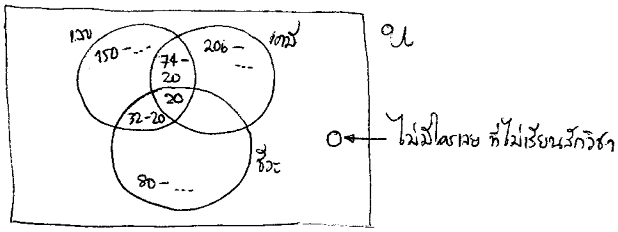
∴ จำนวนนักเรียนที่เล่นฟุตบอลอย่างเดียว $= 25-8 = 17$ คน

———— วอลเลย์บอลอย่างเดียว $= 20-8 = 12$ คน

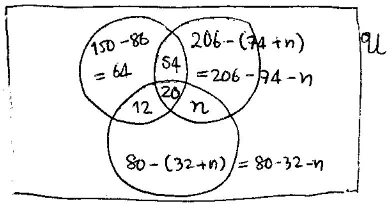
และจำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาทั้งสองชนิด $= n = 8$ คน ตอบ

Ex 43 นักเรียนโรงเรียนมัธยมแห่งหนึ่งมี 300 คน เลือกเรียนคณิตศาสตร์ 150 คน, เลือกเรียนเคมี 206 คน, เลือกเรียนชีววิทยา 80 คน เลือกเรียน ทั้งคณิตศาสตร์และเคมี 74 คน เลือกเรียนทั้งคณิตศาสตร์ และชีววิทยา 32 คน เลือกเรียนทั้งสามวิชา 20 คน จงหาว่า จำนวนนักเรียนที่เลือกเรียน ทั้งเคมี และชีววิทยา แต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ มีทั้งหมดกี่คน โดยที่นักเรียนแต่ละคนต้องเรียนอย่างน้อยคนละ 1 วิชา

Sol เขียนแผนภาพของ เวนน์ - ออยเลอร์ ได้ดังนี้



⇓



โดย $54 + 20 + 12 = 86$

$54 + 20 + n = 74 + n$

$12 + 20 + n = 32 + n$

และจากแผนภาพดังกล่าว $64 + 54 + 20 + 12 + n + [\overbrace{80 - 32}^{48} - n] + [\overbrace{206 - 74} - n] = 300$

$64 + 54 + 20 + 12 + 48 + 132 + \cancel{n} - \cancel{n} - n = 300$

$330 - n = 300$

$\therefore n = 330 - 300 = 30$ คน

$\therefore$ จำนวนนักเรียนที่เรียนเคมีและชีววิทยาแต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ $= n = 30$ คน **ตอบ**

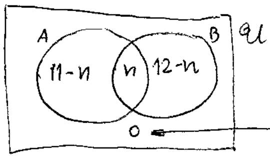
Ex 44 ระหว่างการไปพักผ่อนต่างจังหวัด มีฝนตก 13 วัน ถ้าฝนตกตอนเช้า ตอนบ่ายอากาศแจ่มใส ถ้าฝนตกตอนบ่าย ตอนเช้าจะอากาศแจ่มใส ถ้าวันที่พักอยู่นั้น อากาศแจ่มใสตอนเช้า 11 วัน และอากาศแจ่มใสตอนบ่าย 12 วัน จงหาว่า ไปพักผ่อนต่างจังหวัดกี่วัน?

Sol ให้ A แทนเซตของวันที่มีอากาศแจ่มใสตอนเช้า

" B " บ่าย

★ แล้ว สมมุติให้วันที่ มีอากาศแจ่มใสทั้งวัน = n วัน

เมื่อเขียนแผนภาพของ เวนน์ - ออยเลอร์ แล้ว



จากเหตุผลที่ว่า วันที่ฝนตกเช้า บ่ายอากาศแจ่มใส

บ่าย เช้า

$\therefore$ วันที่ ฝนตกทั้งวัน = ไม่มี = 0 วัน

จาก $\mathcal{U} = (11 - n) + 0 + (12 - n)$ เมื่อ $\mathcal{U}$ = วันที่มีฝนตก (ตอนเช้าหรือบ่ายก็ได้)

$13 = 23 - 2n$

$= 23 - 13 = 10$

$\therefore n = \frac{10}{2} = 5$ วัน

$\therefore$ จำนวนวันที่ไปพักผ่อน $= 11 - \cancel{n} + \cancel{n} + 12 - n + 0$

$= 23 - n = 23 - 5 = 18$ วัน **ตอบ**

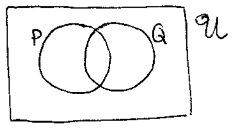
Ex 45 จากการสอบถามผู้ได้รับบัตรเชิญมาทานเลี้ยงงานหนึ่ง ผู้ที่รับปากว่าจะมางานนี้แน่ๆ 66% พอถึงวันงาน พบว่าผู้ที่รับปากว่าจะมาและมาได้ มีถึง 90% ของจำนวนผู้ที่มางานทั้งหมด ขณะเดียวกันผู้ที่ไม่ได้มางานนี้ มีผู้ที่รับปากว่าจะมาถึง 33% ดังนั้นผู้ที่มางานนี้ มีกี่เปอร์เซ็นต์ของผู้ที่ได้รับบัตรเชิญทั้งหมด

Sol เนื่องจากโจทย์ ต้องการหาคำตอบในรูปของ %

$\therefore$ สมมุติว่า ให้ผู้ได้รับบัตรเชิญ มีทั้งหมด 100 คน

ให้ P แทน เซตของผู้ที่รับปากว่าจะมา

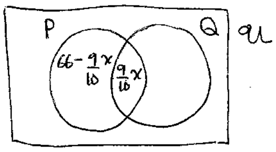
〃 Q แทน เซตของผู้ที่มางานจริงๆ



ถ้าผู้มางานนี้ มี x คน $\therefore$ ผู้ที่ไม่มางาน $= 100 - x$ คน

เนื่องจากส่วน $P \cap Q$ คือผู้ที่รับปากว่าจะมา และมางานจริงๆ ซึ่งมีอยู่ 90% ของผู้ที่มางาน

$\therefore$ จำนวนสมาชิกใน $P \cap Q = \frac{90}{100}x$ คน $= \frac{9}{10}x$ คน



เนื่องจากผู้รับปากว่าจะมา $= 66$ คน

$\therefore n(P) = 66$

แล้ว $\left(66 - \frac{9}{10}x\right) + \frac{9}{10}x = 66$

$\therefore$ ผู้รับปากว่าจะมา แต่ไม่มา $= 66 - \frac{9}{10}x$ คน —(1)

เนื่องจากว่า ผู้ที่ไม่มางาน $= 100 - x$ คน

แต่มี 33% ของผู้ไม่มา แต่รับปากว่าจะมา

$\therefore$ คิดเป็นจำนวนคน $= \frac{33}{100}(100 - x)$ คน

$\therefore$ ผู้ที่รับปากว่าจะมา แต่ไม่มา มี $\frac{3}{100}(100 - x)$ คน —(2)

จะพบว่า (1) = (2) ; $\therefore$

$$66 - \frac{9}{10}x = \frac{33}{100}(100 - x)$$
$$6{,}600 - 90x = 33(100 - x)$$
$$6{,}600 - 90x = 3{,}300 - 33x$$
$$6{,}600 - 3{,}300 = 90x - 33x$$
$$3{,}300 = 57x$$
$$\therefore x \approx \frac{3{,}300}{57} \approx 57.89$$

$\therefore$ ผู้ที่มางานนี้ มีประมาณ 57.89 % **ตอบ**

Ex 46 ใน รร. แห่งหนึ่ง มีนักเรียนทั้งหมด 87 คน มี 43 คนเล่นฮอกกี้ , มี 42 คนเล่นฟุตบอล , มี 47 คนเล่นเทนนิส , มี 15 คนเล่นเทนนิสและฮอกกี้ มี 17 คน เล่นเทนนิสและฟุตบอล มี 21 คน เล่นฮอกกี้และฟุตบอล และนักเรียนแต่ละคนต้องเล่นกีฬาอย่างน้อย 1 ใน 3 อย่าง จงหาว่า

1. มีนักเรียนกี่คนที่เล่นกีฬาทั้ง 3 ชนิด
2. จำนวนนักเรียนที่เล่นฮอกกี้อย่างเดียว
3. ~~~ ฟุตบอล ~~~
4. ~~~ เทนนิส ~~~

Sol ให้ $\mathcal{U}$ แทน เซตของนักเรียนทั้งหมด

H ~~~ ที่เล่นฮอกกี้

F ~~~ ฟุตบอล

T ~~~ เทนนิส

$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

โจทย์กำหนดให้ $n(H) = 32$, $n(F) = 42$, $n(T) = 47$

$n(H \cap T) = 45$, $n(T \cap F) = 17$, $n(H \cap F) = 21$

และเนื่องจากนักเรียน ต้องเล่นกีฬาอย่างน้อย 1 อย่าง

$\therefore n(H \cup F \cup T)' = 0$ คน และทำให้ $n(H \cup F \cup T) = 87$ คน

จาก $n(H \cup F \cup T) = n(H) + n(F) + n(T) - n(H \cap F) - n(H \cap T) - n(F \cap T) + n(H \cap F \cap T)$

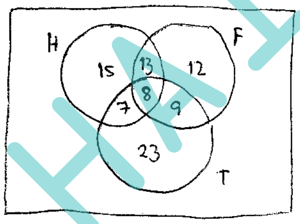
แล้วแทนค่าได้ $87 = 43 + 42 + 47 - 21 - 15 - 17 + n(H \cap F \cap T)$

$87 = 79 + n(H \cap F \cap T)$

$\therefore n(H \cap F \cap T) = 8$ จำนวน

แสดงว่า นักเรียนที่เล่นกีฬาทั้ง 3 ชนิด = 8 คน

ต่อมา จะหาคำตอบข้อย่อย 2, 3. และ 4. ต้องใช้แผนภาพของเวนน์ - ออยเลอร์ ช่วยในการพิจารณา



$\therefore$ นักเรียนที่เล่นแต่ฮอกกี้อย่างเดียว = 15 คน

~~~ ฟุตบอล ~~~ = 12 คน

& ~~~ เทนนิส ~~~ = 23 คน

ตอบ
~~~