

# ระบบสมการ

## 1. ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสอง และสมการเชิงเส้น

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสอง และสมการเชิงเส้น มีรูปทั่วไปดังนี้

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$$

$$PX + QY + R = 0$$

เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปร และ  $A, B, C, D, E, F, P, Q$  และ  $R$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $A, B$  และ  $C$  ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน และ  $P, Q$  ก็ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันด้วย โดยที่สมการเชิงเส้นจะมีกราฟเป็นเส้นตรง ส่วนสมการดีกรีสองจะเป็นกราฟรูปวงกลม พาราโบลา วงรี หรือไฮเพอโบลา

ตัวอย่างของสมการเชิงเส้นมีดังนี้

$$x + 2y = 0$$

$$3x - y = 12$$

$$12x = 3y \quad \text{เป็นต้น}$$

ตัวอย่างของสมการกำลังสองมีดังนี้

$$3x^2 + 2y^2 = -10$$

$$-x^2 + xy + y^2 = -1 \quad \text{เป็นต้น}$$

ถามว่า เราหาคำตอบของระบบสมการเพื่ออะไรครับ ?

ตอบว่า คำตอบของระบบสมการที่เราหา นั่น คือจุดตัดของกราฟเส้นตรงกับกราฟเส้นโค้ง ซึ่งจุดตัดหรือคำตอบนี้ อาจมีเพียงจุดเดียว มีสองจุด หรือไม่มีเลยก็ได้

ขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการ มีดังนี้

- 1) ทำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้เท่ากัน โดยใช้หลักการของ ค.ร.น.
- 2) นำสมการทั้งสองมาลบหรือบวกกัน เพื่อกำจัดตัวแปรร่วมตัวใดตัวหนึ่งทิ้งไป ทำให้ได้สมการใหม่ที่เหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว
- 3) แก้สมการใหม่เพื่อหาค่าตัวแปรนั้น ๆ แล้วแทนค่าตัวแปรที่ได้ในสมการตั้งต้นสมการใดสมการหนึ่ง (ที่มีรูปแบบง่าย ๆ เลขไม่เยอะ) เพื่อหาค่าตัวแปรอีกตัวหนึ่ง
- 4) เมื่อหาค่าตัวแปรทั้งสองได้แล้ว อย่าลืมตรวจคำตอบด้วยนะครับ

ลองมาดูตัวอย่างการแก้ปัญหาโจทย์ต่อไปนี้ครับ

**ตัวอย่างที่ 1** จงแก้ระบบสมการ  $x^2 + y^2 = 25$  ----- ①

$x + y = 1$  ----- ②

**วิธีทำ** จากสมการที่ ②  $x + y = 1$

หาค่า x ได้  $x = 1 - y$  ----- ③

แทนค่า x จาก ③ ใน ①  $(1 - y)^2 + y^2 = 25$

$1 - 2y + y^2 + y^2 = 25$

$2y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$

$2y^2 - 2y - 24 = 0$

$(2y + 6)(y - 4) = 0$

$y = \frac{-6}{2}, 4$  หรือ  $-3, 4$

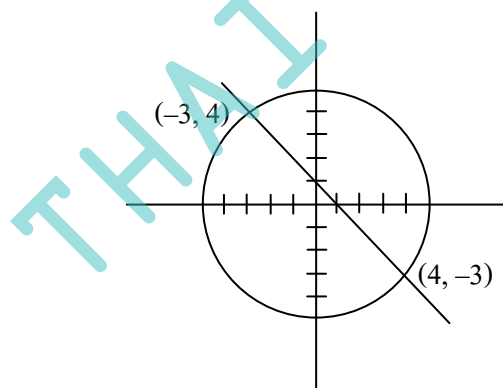
แล้วแทนค่า  $y = -3$  กับ  $4$  ใน ②

จะได้  $x - (-3) = 1$  หรือ  $x + 4 = 1$

$x = 4$  หรือ  $x = -3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ พิกัด  $(4, -3)$  และ  $(-3, 4)$

ตอบ



**ตัวอย่างที่ 2** จงแก้ระบบสมการ  $x - 2y = 8$  ----- ①

$xy = 24$  ----- ②

**วิธีทำ** หาค่า  $x$  จากสมการที่ ①  $x = 2y + 8$  ----- ③

แทนค่า  $x$  จาก ③ ใน ②  $(2y + 8)y = 24$

เพื่อหาค่า  $y$   $2y^2 + 8y - 24 = 0$

$(2y + 12)(y - 2) = 0$

$y = 2, \frac{-12}{2}$  หรือ  $2, -6$

แทนค่า  $y = 2$  และ  $-6$  ใน ① เพื่อหาค่า  $x$

จะได้  $x - 2(2) = 8$  หรือ  $x - 2(-6) = 8$

$x = 8 + 4$  หรือ  $x = 8 - 12$

$x = 12$  หรือ  $x = -4$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ พิกัด  $(12, 2)$  และ  $(-4, -6)$

**ตอบ**

THAI CADET

**ตัวอย่างที่ 3** จงแก้ระบบสมการ  $2x^2 - 2xy + y^2 = 10$  ----- ①

$2x - y + 2 = 0$  ----- ②

**วิธีทำ** หาค่า x จากสมการที่ ②  $x = \frac{y}{2} - 1 = \frac{y}{2} - 1$  ----- ③

แทนค่า x จาก ③ ใน ① เพื่อหาค่า y

$$= 2\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{y}{2} - 1\right)y + y^2 = 10$$

$$= 2\left[\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)(1) + 1^2\right] - 2y\left(\frac{y}{2}\right) + 2y + y^2 - 10 = 0$$

$$= 2\left(\frac{y^2}{4} - y + 1\right) - y^2 - 2y + y^2 - 10 = 0$$

$$= \frac{y^2}{2} - 2y + 2 + 2y - 10 = 0$$

$$= \frac{y^2}{2} - 8 = 0$$

$$y = \sqrt{8(2)}$$

$$y = \pm 4$$

แทนค่า  $y = \pm 4$  ใน ② เพื่อหาค่า x

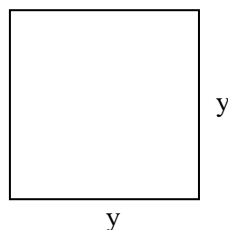
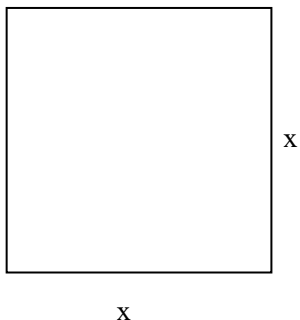
จะได้  $2x - (4) + 2 = 0$  หรือ  $2x - (-4) + 2 = 0$   
 $2x - 2 = 0$  หรือ  $2x + 6 = 0$   
 $x = \frac{2}{2} = 1$  หรือ  $x = \frac{-6}{2} = -3$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ พิกัด (1, 4) และ (-3, -4)

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 4** ผลต่างของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปเท่ากับ 24 ตารางเซนติเมตร ความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่น้อยกว่าสองเท่าของความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กอยู่ 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูป

**วิธีทำ** จากโจทย์ เขียนรูปเพื่อประกอบการแก้ปัญหาโจทย์ได้ดังนี้



จัตุรัสรูปใหญ่มีพื้นที่  $= x^2$  ตารางเซนติเมตร

จัตุรัสรูปเล็กมีพื้นที่  $y^2$  ตารางเซนติเมตร

เราสามารถแปลงโจทย์ให้เป็นสมการได้ดังนี้

ผลต่างของพื้นที่ของ □ จัตุรัสทั้งสองรูป คือ

$$x^2 - y^2 = 24 \quad \text{----- ①}$$

ผลต่างของความยาวของด้าน ของ □ จัตุรัสทั้งสองรูป คือ

$$2y - x = 3 \quad \text{----- ②}$$

หาค่า x จากสมการที่ ② จะได้

$$x = 2y - 3 \quad \text{----- ③}$$

แทนค่า x จาก ③ ใน ① เพื่อหาค่า y

$$(2y - 3)^2 - y^2 = 24$$

$$4y^2 - 2(2y)(3) + 9 - y^2 - 24 = 0$$

$$3y^2 - 12y - 15 = 0$$

$$(3y - 3)(y - 5) = 0$$

$$y = 5, -1$$

แต่ไม่มีระยะทาง หรือความยาวใดที่เป็นจำนวนติดลบ ดังนั้น  $y = 5$

แทนค่า  $y = 5$  ใน ②

$$2(5) - x = 3$$

$$10 - 3 = x$$

$$\text{หรือ } x = 10 - 3 = 7$$

ทำให้เราทราบว่า ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่ คือ 7 เซนติเมตร

และ ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็ก คือ 5 เซนติเมตร

**ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 5** จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้กราฟเส้นตรง  $y - 2x = k$  ตัดกับกราฟพาราโบลา  $y = x^2$  ที่จุดตัดเพียงจุดเดียว

วิธีทำ กำหนดให้  $y - 2x = k$  ----- ①

และ  $y = x^2$  ----- ②

จาก ① ย้ายข้างหาค่า  $y$  ได้  $y = 2x + k$  ----- ③

เนื่องจาก ③ = ② ดังนั้น  $2x + k = x^2$

$$x^2 - 2x - k = 0$$

หาค่า  $x$  จากสูตร  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-k)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4k}}{2}$$

โดยที่  $\sqrt{4 + 4k} = \sqrt{4(1+k)} = 2\sqrt{1+k}$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{1+k})}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{1+k}$$

การที่กราฟทั้งสองตัดกันเพียงจุดเดียว ต้องแทนค่า  $k$  ที่ทำให้  $x$  มีคำตอบเดียว

นั่นคือ  $x = 1 \pm 0$

$$\therefore \sqrt{1+k} = 0$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง  $1+k = 0$

จะได้  $k = -1$

ตอบ



**ตัวอย่างที่ 7** จงแก้ระบบสมการ  $2y(x - y) = 7$  ----- ①  
 $7y^2 - 4 + xy = 0$  ----- ②

**วิธีทำ** จัดรูปแบบสมการใหม่ จะได้

จาก ① ;  $2y(x) - 2y(y) = 7$   
 $2y^2 - 2y^2 = 7$   
 $2y^2 - 2xy + 7 = 0$  ----- ① ใหม่

จาก ② ;  $7y^2 + 1xy - 4 = 0$  ----- ② ใหม่

ขั้นที่ 1 ทำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรให้เท่ากัน ในที่นี้เลือกทำกับตัวแปร  $xy$

②  $\times 2$ ;  $14y^2 + 2xy - 8 = 0$  ----- ③

ขั้นที่ 2 กำจัดตัวแปรในเทอม  $xy$  ให้เหลือเพียงตัวแปร  $y$

① + ③;  $2y^2 - 2xy + 7 + 14y^2 + 2xy - 8 = 0 + 0$   
 $16y^2 - 1 = 0$   
 $(4y)^2 - 1^2 = 0$   
 $(4y + 1)(4y - 1) = 0$   
จะได้  $y = \pm \frac{1}{4}$

ขั้นที่ 3 แทนค่าตัวแปร  $y$  ที่ได้เพื่อหาค่าตัวแปร  $x$

แทนค่า  $y = \pm \frac{1}{4}$  ใน ①;  $2\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 7$  หรือ  $2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x - \left[-\frac{1}{4}\right]\right) = 7$   
 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = 7$  หรือ  $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = 7$   
 $x - \frac{1}{4} = 7 \times 2$  หรือ  $x + \frac{1}{4} = 7(-2)$   
 $x = 14 + \frac{1}{4} = 14\frac{1}{4}$  หรือ  $x = -14 - \frac{1}{4} = -14\frac{1}{4}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้มี 2 คำตอบ คือ  $\left(14\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  และ  $\left(-14\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$  **ตอบ**



**ตัวอย่างที่ 8**

จงหาคำตอบของระบบสมการ  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}$  ----- ①

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$  ----- ②

**วิธีทำ** ข้อนี้ไม่ใช่แค่หาเลขมาคูณกับสัมประสิทธิ์แล้วครับ แต่ต้องคิดหาวิธีว่าทำอะไรจะทำให้พจน์หรือ term หนึ่งเท่ากันได้ เพื่อจะได้นำมาลบกัน แล้วแก้สมการหาค่าตัวแปรที่เหลือ

นำ ② มายกกำลังสองทั้งสองข้าง  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{36}$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{36} - \frac{2}{xy}$  ----- ③

ซึ่ง ③ = ② พอดี (เพราะเราตั้งใจจะทำให้มันเท่ากันนั่นเอง)

ดังนั้น  $\frac{1}{36} - \frac{2}{xy} = \frac{13}{36}$

$\frac{1}{36} - \frac{13}{36} = \frac{2}{xy}$

$\frac{12}{36} = \frac{2}{xy}$

จะได้  $xy = -6$

$x = \frac{6}{y}$  ----- ④

แทนค่า  $x = \frac{6}{y}$  ใน ② เพื่อหาค่า  $y$ ;  $\frac{1}{\left(\frac{6}{y}\right)} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$  ----- ⑤

$-\frac{y}{6} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

$\frac{-y^2 + 6}{6y} = \frac{1}{6}$

$-y^2 + 6 = y$

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y + 3)(y - 2) = 0$

$y = 2, -3$

แทนค่า  $y = 2, -3$  ใน ② ซึ่งเป็นรูปแบบสมการที่ง่าย เพื่อหาค่า  $x$

$$\begin{aligned} \text{จาก ② จะได้ } \frac{1}{x} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{(-3)} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} & \frac{1}{x} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} &= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} & \frac{1}{x} &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ x &= -3 \quad \text{และ} & x &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้มี 2 คำตอบ คือ  $(2, -3)$  และ  $(-3, 2)$

ตอบ

THAI CADET

**ตัวอย่างที่ 9**

จงหาค่า  $a$  ที่เป็นบวก เมื่อ  $a$  เป็นค่าคงตัวจากระบบสมการ  $x^2 + y^2 = a^2$

$x^2 - y^2 = -2a$  และ  $x^2 = 4$

**วิธีทำ**

เรากำหนดให้  $x^2 + y^2 = a^2$  ----- ①

$x^2 - y^2 = -2a$  ----- ②

และ  $x^2 = 4$  ----- ③

เรากำจัดตัวแปร  $y$  ให้เหลือเพียงตัวแปร  $x$

① + ②;  $x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = a^2 - 2a$  ----- ④

$2x^2 = a^2 - 2a$

แทนค่า  $x^2 = 4$  จาก ③ ใน ④;  $2(4) = a^2 - 2a$

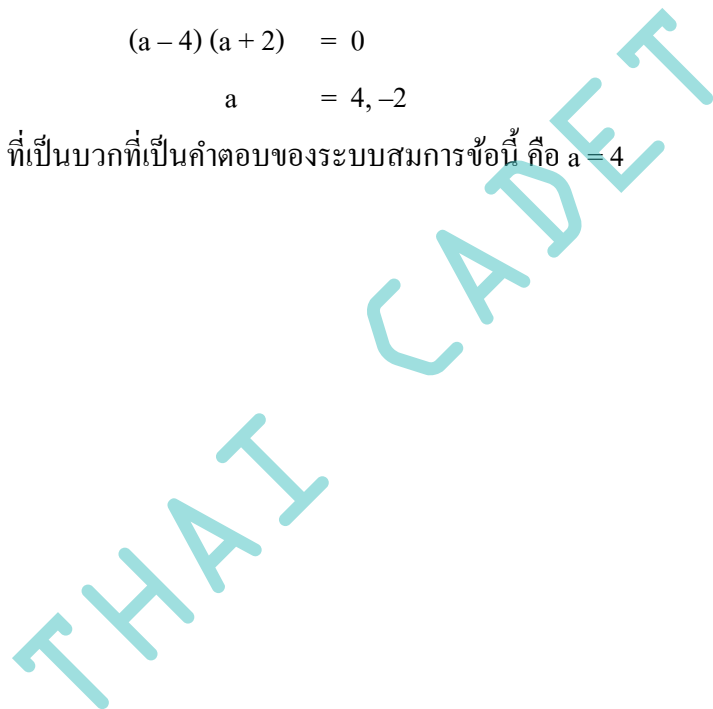
$a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a - 4)(a + 2) = 0$

$a = 4, -2$

ดังนั้น ค่า  $a$  ที่เป็นบวกที่เป็นคำตอบของระบบสมการข้อนี้ คือ  $a = 4$

**ตอบ**



**ตัวอย่างที่ 10** เมื่อผลคูณของเลขจำนวนบวกสองจำนวน รวมกับจำนวนที่น้อยกว่าเป็น 91 และผลคูณของเลขสองจำนวนนั้นมากกว่าจำนวนที่น้อยกว่าอยู่ 77 แล้ว เลขสองจำนวนนั้นเป็นเท่าใด

**วิธีทำ** จากโจทย์เราสามารถเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ให้เลขจำนวนบวกตัวแรกเป็นตัวแปร  $x$                        $xy + y = 91$                       ----- ①

ให้เลขจำนวนบวกตัวแรกเป็นตัวแปร  $y$                        $xy - y = 77$                       ----- ②

และให้  $y$  เป็นจำนวนที่น้อยกว่า  $x$

กำจัดตัวแปร  $xy$  ให้เหลือเพียงตัวแปร  $y$  เพียงตัวเดียว

① - ②;             $xy + y - y(xy - y)$             =  $91 - 77$

$xy + y - xy + y$             =  $14$

$2y$             =  $14$

$y$             =  $7$

แทนค่า  $y = 7$  ใน ② เพื่อหาค่า  $x$

จาก ②;             $x(7) - 7$             =  $77$

$x(7)$             =  $77 + 7$

$x$             =  $\frac{24}{7}$

$x$             =  $12$

ดังนั้น เลขสองจำนวนที่โจทย์ต้องการ คือเลข 12 และ 7

**ตอบ**

-----