

บทที่ 2 พหุนาม (Polynomials)

เอกนาม (Monomial) คือ นิพจน์ที่สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปทรงคูณของค่าคงตัว กับตัวแปร ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป โดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นศูนย์ หรือจำนวนเต็มบวก

ข้อสังเกต * เลขใด ๆ ถือเป็นเอกนาม

เช่น $1 = 1 \cdot (\text{ตัวแปรใด ๆ})^0$ เช่น $= 1x^0, 1b^0, 1(axy)^0$ เป็นต้น

* ตัวแปรใด ๆ เป็นเอกนาม เช่น x, xy, ab เป็นต้น

เพราะตัวแปรเหล่านี้ คูณด้วย 1 ซึ่งเห็นค่าคงตัว เราทราบด้วยว่า 1 คือเอกลักษณ์การคูณ

น้อง ๆ ที่กำลังศึกษาอยู่ ต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องต่อไปนี้ ;

- ดีกรี และสัมประสิทธิ์ของเอกนาม
- เอกนามคล้าย
- การบวกและการลบเอกนาม

มาเริ่มนิยามเอกนาม จากตัวอย่างต่อไปนี้

นิพจน์	สัมประสิทธิ์	ดีกรี
1) $-7x^3y$	-7	4
2) $3x^2y^2 \div 4$	$\frac{3}{4}$	4
3) $3^{-2}x^8y^2z$	$\frac{1}{3^2}$ หรือ $\frac{1}{9}$	11
4) $\frac{a^2}{4b^{-3}}$	$\frac{1}{4}$	5
5) 1.33	1.33	0
6) 0	0	0 (มักไม่กล่าวถึงดีกรีของเอกนาม 0)

นิยามเอกนามคล้าย คู่อันดับของตัวแปรของเอกนาม มีตัวแปรเหมือนกัน แสดงว่าเงินเอกนามคล้ายกัน

	เอกนาม	ผลบวกของเอกนาม	ผลลบของเอกนาม
7.	$2x^2y$ กับ $3x^2y$	คล้าย	$5x^2y$ $-x^2y$
8.	$-7x^4y$ กับ $-7xy^4$	* ไม่คล้าย *	$-7x^4y + (-7xy^4)$ $-7x^4y - (-7xy^4)$
9.	$2x^5$ กับ $5x^5$	คล้าย	$7x^5$ $-3x^5$
10.	$4abc^3$ กับ $-3abc^3$	คล้าย	$1abc^3$ $7abc^3$
11.	s^3t กับ $4s^3t$	คล้าย	$5s^3t$ $-3s^3t$

* เมื่อเอกนามไม่คล้ายกัน ก็ +/- กันไม่ได้

แต่ ยังสามารถ \times / \div กันได้

พหุนาม (Polynomials) คือ นิพจน์ที่มีตัวแปรเขียนในรูปเอกนาม หรือเขียนในรูปผลบวกของเอกนาม ตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป

พหุนาม ในรูปผลบวกหรือลบ คือ พหุนามที่ไม่มีพจน์ของเอกนามที่คล้ายกันเลย

ดีกรีของพหุนาม คือ ดีกรีสูงสุดของพจน์ในพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกหรือลบ

- 12. ดีกรีของพหุนาม $a^3 + 6a^2 - 12a + 8$ คือ 3 (ดีกรีของ a^3)
- 13. ดีกรีของพหุนาม $5x^2y^2 + 4x^2yz^3 - 5x^3z^2 + 9$ คือ 6 (ดีกรีของ $4x^2yz^3 + 4x^2y^1z^3 \Rightarrow 2+1+3=6$)

14. จงหผลบวกของพหุนาม $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ กับ $-4x^3 - 8x + 4 + x^2$
 จะได้ $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3 + (-4x^3 - 8x + 4 + x^2)$

เครื่องหมายเหมือนกัน เจอกันเป็น (+) เครื่องหมายต่างกันเจอกันเป็น (-)

จะได้ $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3 - 4x^3 - 8x + 4 + x^2$
 $= 5x^3 - 4x^3 - 6x^2 + x^2 + 2x - 8x + 3 + 4$
 $= x^3 - 5x^2 - 6x + 7$ ตอบ

15. จงหผลบวกของ $2r - 6s + 4t$, $5r - 3s$, $r - s$ และ $-r + 2s - 3t + u$

ให้ตัวแปรบวกในแนวตั้ง มีตัวแปร 4 ตัว คือ r, s, t และ u ตัวแปรเหมือนกัน ให้เขียนเรียงกันในแนวตั้ง

จะได้

$$\begin{array}{r}
 2r - 6s + 4t + 0 \\
 5r - 3s + 0 + 0 \\
 1r - 1s + 0 + 0 \\
 -1r + 2s - 3t + u \\
 \hline
 7r - 8s + 1t + u
 \end{array}$$

ตอบ

16. จงลบ $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ ด้วย $-4x^3 - 8x + 4 + x^2$

ลบด้วยแนวนอน; $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3 - (-4x^3 - 8x + 4 + x^2)$
 $= 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3 + 4x^3 - x^2 + 8x - 4$
 $= 5x^3 + 4x^3 - 6x^2 - x^2 + 2x + 8x + 3 - 4$
 $= 9x^3 - 7x^2 + 10x - 1$

ลบด้วยแนวตั้ง; $5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$

$$\begin{array}{r}
 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3 \\
 -4x^3 + x^2 - 8x + 4 \\
 \hline
 9x^3 - 7x^2 + 10x - 1
 \end{array}$$

ได้ผลลัพธ์เหมือนกัน

ตอบ

17. จงหาค่าของ A+B และ A-B

เมื่อ $A = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ และ $B = 3x^5 + x^3 - 2x + 2$

วิธีทำ ทน A + B ; $2x^3 - 3x^2 + x^1 - 1$
 $\frac{3x^5 + 1x^3 + 0 - 2x^1 + 2}{3x^5 + 3x^3 - 3x^2 - 1x^1 + 1}$

ทน A - B ; $0x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 1x^1 - 1$
 $\frac{3x^5 + 1x^3 + 0x^2 - 2x^1 + 2}{-3x^5 + 1x^3 - 3x^2 + 3x^1 - 3}$

ตอบ

18. $-x + \frac{1}{2} + 4x^4 - 2x^3 + 7x - 1 + x^3 - 2x - 4x^4$ ให้เรียงกำลังมาก ไปหาทีละน้อย
ดูเครื่องหมาย +/- ให้ดีด้วย

$= 4x^4 - 4x^4 - 2x^3 + x^3 - x + 7x - 2x + \frac{1}{2} - 1$
 $= 0 - 1x^3 + 4x - \frac{1}{2}$

$= -1x^3 + 4x - \frac{1}{2}$ เป็นอนุกรมดีกรี 3 (จากเทอม $-1x^3$) ตอบ

19. $9x^2 - \{ 3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y)] + 4 \}$
 $= 9x^2 - \{ 3x^2 - 2[y - 3x^2 + 3y] + 4 \}$ $= 9x^2 - \{ 3x^2 - 2y + 6x^2 - 6y + 4 \}$
 $= 9x^2 - 3x^2 + 2y - 6x^2 + 6y - 4$
 $= 9x^2 - 3x^2 - 6x^2 + 2y + 6y - 4$
 $= 8y - 4$ เป็นอนุกรมดีกรี 1 ตอบ

ต่อไปนี้อยู่ที่ ท้องรู้จักการคูณอนุกรม ซึ่งจะมีทั้ง

- การคูณเอกนาม ด้วยเอกนาม
- การคูณเอกนาม ด้วยพหุนาม = การคูณพหุนาม ด้วยเอกนาม
- การคูณพหุนาม ด้วยพหุนาม

อย่าลืม!
 ตัวเลข x ตัวเลข
 ตัวแปร x ตัวแปร
 เครื่องหมาย x เครื่องหมาย

20. $(3x^2)(-4x^3) = -12x^5$

เกิดจาก $\frac{(+)(-)(3)(4)(x^2)(x^3)}{\text{sign number variable}}$

21. $(-3x^2y^3z)(2x^4y)(-4xy^4z^2) = (-)(+)(-)(3)(2)(4) \cdot x^{2+4+1} \cdot y^{3+1+4} \cdot z^{1+2}$
 $= -24x^7y^8z^3$

22. จงหาผลคูณของ $5x^2y^4$ กับ $3xy - 4x^3 + 2xy^2$

$$\begin{aligned} 5x^2y^4(3xy - 4x^3 + 2xy^2) &= (5x^2y^4)(3xy) - (5x^2y^4)(4x^3) + (5x^2y^4)(2xy^2) \\ &= 15x^3y^5 - 20x^5y^4 + 10x^3y^6 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

23. $(x-2y)(x^2-xy) = (x-2y)(x^2) - (x-2y)(xy)$ กระจายตัวแล้ว แล้วนำตัวหน้าเข้าคูณ

$$\begin{aligned} &= (x^3 - 2x^2y) - (1x^2y - 2xy^2) \\ &= x^3 - 2x^2y - 1x^2y + 2xy^2 \\ &= x^3 - 3x^2y + 2xy^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

หรือ ๑: กระจายตัวหน้า แล้วนำตัวหลังเข้าคูณ

$$\begin{aligned} (x-2y)(x^2-xy) &= (x)(x^2-xy) - (2y)(x^2-xy) \\ &= x^3 - x^2y - 2x^2y + 2xy^2 \\ &= x^3 - 3x^2y + 2xy^2 \quad \text{จะได้คำตอบเหมือนกัน} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ดูหลักท่อน้อยๆ

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b-c) = ab - ac$$

$$-a(-b-c) = +ab + ac$$

$$(ab+c)(d-e) = (ab+c)(d) - (ab+c)(e)$$

$$\text{หรือ} = (ab)(d-e) + (c)(d-e) \quad \text{แยกโพ้เหมือนกัน}$$

24. $(x-5)(x+7) = (x-5)(x) + (x-5)(7)$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 5x) + (7x - 35) \\ &= x^2 - 5x + 7x - 35 = x^2 + 2x - 35 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

25. $(5x-3y)(2x-3y+1) = (5x-3y)(2x) - (5x-3y)(3y) + (5x-3y)(1)$

$$\begin{aligned} &= 10x^2 - 6xy - [15xy - 9y^2] + 5x - 3y \\ &= 10x^2 - 6xy - 15xy + 9y^2 + 5x - 3y \\ &= 10x^2 + 9y^2 - 21xy + 5x - 3y \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ผลคูณของพหุนามที่ควรจำ
ให้ A, B และ C แทนพหุนามใด ๆ

1.	$(A - B)(A + B)$	$= A^2 - B^2$
2.	$(A + B)^2$	$= A^2 + 2AB + B^2$
3.	$(A - B)^2$	$= A^2 - 2AB + B^2$
4.	$(A + B)^3$	$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5.	$(A - B)^3$	$= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6.	$(A + B)(A^2 - AB + B^2)$	$= A^3 + B^3$
7.	$(A - B)(A^2 + AB + B^2)$	$= A^3 - B^3$
8.	$(A + B + C)^2$	$= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

ข้อสังเกต $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ และ $(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$

นี่ไม่เห็นหัว ต้องท่อง ๆ ๆ ๆ นะครับ เพราะไม่มีใครรู้สูตรทุกสูตรในโลก

แต่ เมื่อน้องๆ ทำแบบฝึกหัดได้บ่อยครั้ง ๆ ๆ มากขึ้น ก็จำได้เองครับ

เช่น น้องอาจจำไม่ได้ว่า $(A + B + C)^2$ เท่ากับเท่าไร

$$\begin{aligned} \text{แต่ ถ้าอ้อรู้ว่า } (A + B + C)^2 &= ((A + B) + C)^2 = (A + B)^2 + 2(A + B)(C) + C^2 \\ &= A^2 + 2AB + B^2 + 2AC + 2BC + C^2 \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \end{aligned}$$

ก็คิดได้ เนมีอนสูตรที่ 8 เช่นกัน

เห็นไหมครับ ทุกอย่างมันอยู่ ตรงนี้



จงหาค่าผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

$$26. (x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$27. (7 - 8a^2)(7 + 8a^2) = 7^2 - (8a^2)^2 = 49 - 64a^2$$

$$\begin{aligned} 28. (3y^2 + 2x)^2 &= (3y^2)^2 + 2(3y^2)(2x) + (2x)^2 \\ &= 9y^4 + 12xy^2 + 4x^2 = 4x^2 + 9y^4 + 12xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29. \quad (x+y-z)^2 &= ((x+y)-z)^2 \\
 &= (x+y)^2 - 2(x+y)(z) + z^2 \\
 &= (x^2+2xy+y^2) - (2zx+2zy) + z^2 \\
 &= x^2+2xy+y^2 - 2xz - 2yz + z^2 \\
 &= x^2+y^2+z^2 + 2xy - 2xz - 2yz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30. \quad (x+y+4)(x+y-4) &= ((x+y)+4)((x+y)-4) \\
 &= (x+y)^2 - 4^2 \\
 &= x^2+2xy+y^2 - 16
 \end{aligned}$$

จงทำให้ง่าย

$$\begin{aligned}
 31. \quad 4x - 2x^3 - (2x - 3x^2) &= 4x - 2x^3 - 2x + 3x^2 \\
 &= -2x^3 + 3x^2 + 2x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32. \quad 3a - 4b - (3b+a) - (5a+8b) &= 3a - 4b - 3b - a - 5a - 8b \\
 &= 3a - a - 5a - 4b - 3b - 8b \\
 &= -3a - 15b
 \end{aligned}$$

ถ้า $x=3$, $y=2$ และ $z=0$ จงหาค่าของข้อ 33 และ 34

$$\begin{aligned}
 33. \quad x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)y^3 - xyz^3 &= 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)(2)^3 - 0 \quad \left(\text{เพราะถ้า } z \text{ คูณกับตัวใดก็ตาม} \right. \\
 &= 9 + \frac{3(8)}{2} = 9+12 \quad \left. \text{ได้คำตอบเป็น } 0 \text{ หมด} \right) \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

$$34. \quad \left(\frac{1}{4}\right)x^3y^4 + \left(\frac{5z^2}{6}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)(3)^3(2)^4 + \left(\frac{5(0)^2}{6}\right) = \frac{1}{4}(27)(16) = 108$$

จงหาคำตอบของอนุกรม

$$35. \quad (a-5)(a-5) = (a-5)^2 = a^2 - 10a + 25$$

$$\begin{aligned}
 36. \quad (-4+5x)(3-2x) &= (-4+5x)(3) - (-4+5x)(2x) = -12 + 15x - (-8x + 10x^2) \\
 &= -12 + 15x + 8x - 10x^2 \\
 &= -10x^2 + 23x - 12
 \end{aligned}$$

37. $(x^2+3y)(x^2-3y) = (x^2)^2 - (3y)^2 = x^4 - 9y^2$

38. $(4a-b^3)(3a+2b^3) = \dots$

ก่อนทำในนี้ ๆ จะบอกอีกวิธีหนึ่งของมรดกอนุกรม กรณี่ $(a+b)(c+d)$

ที่เราเคยทำ $(a+b)(c+d) = (a+b)(c) + (a+b)(d)$

หรือ $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$

นี่มีอีกวิธีมาสอนด้วย ; $(a+b)(c+d)$ ใช้หลัก (หน้า x หน้า) + (หลัง x หลัง) + (ไขว้ x ไขว้) + (ไขว้ x ไขว้)

ดังนั้น $(a+b)(c+d) = \underline{a.c} + \underline{b.d} + \underline{b.c} + \underline{a.d}$
 $= ac + [bc + ad] + bd$

เช่น $(x+2)(x-4) = x(x) + 2x - 4x + 2(-4)$
 $= x^2 - 2x - 8$ ง่าย ๆ ครับ

$\therefore (4a-b^3)(3a+2b^3) = (4a \times 3a) - 3ab^3 + 8ab^3 - 2b^6$
 $= 12a^2 + 5ab^3 - 2b^6$
 $= -2b^6 + 5ab^3 + 12a^2$

และข้อต่อ ๆ ไป ก็จะใช้วิธีนี้บ่อย ๆ เหนาะ: ง่ายดีครับ

39. $(2c-1)(2c-3) = (2c)(2c) - 1 \cdot 2c - 3 \cdot 2c + 3$
 $= (2c)^2 - 4 \cdot 2c + 3$

40. $(5x+2)(5x+2) = (5x+2)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2) + 2^2$
 $= 25x^2 + 20x + 4$

41. $(c+z)(c+z) = (c+z)^2 = c^2 + 2cz + z^2$

42. $(2x+3y)(3x+4) = (2x)(3x) + (3y)(3x) + (2x)(4) + (3y)(4)$
 $= 6x^2 + 9xy + 2xy + 3y^2$
 $= 6x^2 + 11xy + 3y^2$

43. $(7a-3b)(7a+b) = (7a)(7a) - (3b)(7a) + (7a)(b) - (3b)(b)$
 $= 49a^2 - 21ab + 7ab - 3b^2$
 $= 49a^2 - 14ab - 3b^2$

44. $(2a^4 - 4a^2 - 1)(2a^4 + 4a^2 + 1) = ((2a^4 - 4a^2) - 1) ((2a^4 + 4a^2) + 1)$

$$(หน้า - น้อย)(หน้า + น้อย) = หน้า^2 - น้อย^2$$

$$\begin{aligned} \text{กน } ((2a^4 - 4a^2) - 1)((2a^4 + 4a^2) + 1) &= (2a^4 - 4a^2)(2a^4 + 4a^2) - 1(2a^4 + 4a^2) + 1(2a^4 - 4a^2) - 1 \\ &= [(2a^4)^2 - (4a^2)^2] - \cancel{2a^4} - 4a^2 + \cancel{2a^4} - 4a^2 - 1 \\ &= 4a^8 - 16a^4 - 8a^2 - 1 \end{aligned}$$

หรือ เมื่อมีจากรูปเครื่องหมาย จะสามารถจัดรูปใจทรงใหม่ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (2a^4 - 4a^2 - 1)(2a^4 + 4a^2 + 1) &= \underbrace{[2a^4 - (4a^2 + 1)]}_{\text{หน้า}} \underbrace{[2a^4 + (4a^2 + 1)]}_{\text{หน้า}} = \text{หน้า}^2 - \text{น้อย}^2 \\ &= (2a^4)^2 - (4a^2 + 1)^2 = 4a^8 - [(4a^2)^2 + 2(4a^2)(1) + 1^2] \\ &= 4a^8 - [16a^4 + 8a^2 + 1] \\ &= 4a^8 - 16a^4 - 8a^2 - 1 \end{aligned}$$

จึงได้คำตอบเท่ากับวิธีบน

$$\begin{aligned} 45. (3x^3 - x^2 + 2)(x^2 - 5) &= [(3x^3 - x^2) + 2](x^2 - 5) \\ &= (3x^3 - x^2)(x^2 - 5) + 2(x^2 - 5) \\ &= [3x^3(x^2) - x^2 \cdot x^2 - 5 \cdot 3x^3 + 5x^2] + 2x^2 - 2(5) \\ &= 3x^5 - x^4 - 15x^3 + 5x^2 + 2x^2 - 10 \\ &= 3x^5 - x^4 - 15x^3 + 7x^2 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 46. (1 + 3a + 3a^2 + a^3)(1 - 2a + a^2) &= (a^3 + 3a^2 + 3a + 1)(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^3(a^2 - 2a + 1) + 3a^2(a^2 - 2a + 1) + 3a(a^2 - 2a + 1) + 1(a^2 - 2a + 1) \\ &= a^5 - 2a^4 + a^3 + 3a^4 - 6a^3 + 3a^2 + 3a^3 - 6a^2 + 3a + a^2 - 2a + 1 \\ &= a^5 + 3a^4 - 2a^3 + a^3 - 6a^2 + 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 + a^2 + 3a - 2a + 1 \\ &= a^5 + 3a^4 - 4a^3 - 2a^2 + a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49. (6y^2 + y^4 + 1 - 4y^3 - 4y)(1 + y^2 - 2y) &= (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1)(y^2 - 2y + 1) \\ &= y^4(y^2 - 2y + 1) - 4y^3(y^2 - 2y + 1) + 6y^2(y^2 - 2y + 1) - 4y(y^2 - 2y + 1) + 1(y^2 - 2y + 1) \\ &= y^6 - 2y^5 + y^4 - 4y^5 + 8y^4 - 4y^3 + 6y^4 - 12y^3 + 6y^2 - 4y^3 + 8y^2 - 4y + y^2 - 2y + 1 \\ &= y^6 - 2y^5 - 4y^5 + y^4 + 8y^4 + 6y^4 - 4y^3 - 12y^3 - 4y^3 + 6y^2 + 8y^2 + y^2 - 4y - 2y + 1 \\ &= y^6 - 6y^5 + 15y^4 - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1 \end{aligned}$$

48. $(2-x+3x^2-2x^4)(1-2x+x^3)(1+3x+x^2)$... โจทย์ให้: ขวามาดนี้

แยกคิดกันดีไหม ให้ $(2-x+3x^2-2x^4) = (-2x^4+3x^2-x+2) = A$
 $(1-2x+x^3) = (x^3-2x+1) = B$
 $(1+3x+x^2) = (x^2+3x+1) = C$

ดังนั้น หากโจทย์ จะเป็นรูป $(A)(B)(C)$ นั้นเอง

คิด $(A)(B)$ ก่อน จะได้ ; $(-2x^4+3x^2-x+2)(x^3-2x+1)$
 $= -2x^4(x^3-2x+1) + 3x^2(x^3-2x+1) - x(x^3-2x+1) + 2(x^3-2x+1)$
 $= -2x^7 + 4x^5 - 2x^4 + 3x^5 - 6x^3 + 3x^2 - x^4 + 2x^2 - x + 2x^3 - 4x + 2$
 $= -2x^7 + 4x^5 + 3x^5 - 2x^4 - x^4 - 6x^3 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^2 - x - 4x + 2$
 $= -2x^7 + 7x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 5x + 2$

แล้วนำ $(A)(B)$ ไปคูณกับ C

จะได้รูปมาตรฐาน ดังนี้ ; $(-2x^7+7x^5-3x^4-4x^3+5x^2-5x+2)(x^2+3x+1)$
 $= -2x^7(x^2+3x+1) + 7x^5(x^2+3x+1) - 3x^4(x^2+3x+1) - 4x^3(x^2+3x+1)$
 $+ 5x^2(x^2+3x+1) - 5x(x^2+3x+1) + 2(x^2+3x+1)$
 $= -2x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 7x^7 + 21x^6 + 7x^5 - 3x^6 - 9x^5 - 3x^4 - 4x^5 - 12x^4 - 4x^3$
 $+ 5x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 15x^2 - 5x + 2x^2 + 6x + 2$
 $= -2x^9 - 6x^8 - 2x^7 + 7x^7 + 21x^6 - 3x^6 + 7x^5 - 9x^5 - 4x^5 - 3x^4 - 12x^4 + 5x^4$
 $- 4x^3 + 15x^3 - 5x^3 + 5x^2 - 15x^2 + 2x^2 - 5x + 6x + 2$
 $= -2x^9 - 6x^8 + 5x^7 + 18x^6 - 6x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 8x^2 + x + 2$

สำเร็จแล้วด้วย เหนื่อยบ้าง ยากอะไรได้ไหมครับ ? !!

การหารพหุนาม (Division of Polynomials) เริ่มจากทรหดอดทน ด้วยอดทน

49. $\frac{25x^4}{5x^2} = \frac{5 \cdot 5x^{4-2}}{5} = 5x^2$

50. $\frac{-18x^3y^2z^3}{15xy^2z^2} = -\frac{6}{5}x^{3-1}y^{2-2}z^{3-2} = -\frac{6}{5}x^2z^1$

51. $\frac{15a^2bc^2}{-3a^2d} = \frac{-5a^{2-2} \cdot b \cdot c^2}{d} = \frac{-5bc^2}{d}$

ต่อมาหารพหุนาม สองจนจบไป ด้วยอดทน

52. $\frac{20x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 75x}{5x} = \frac{20x^4}{5x} - \frac{5x^3}{5x} + \frac{15x^2}{5x} - \frac{75x}{5x}$
 $= 4x^3 - x^2 + 3x - 15$

$$53. \frac{4a^3b^2 + 16ab - 4a^2}{-2a^2b} = \frac{+4a^3b^2}{-2a^2b} + \frac{16ab}{-2a^2b} - \frac{4a^2}{-2a^2b}$$

$$= -2ab - \frac{8}{a} + \frac{2}{b} \quad \text{หรือ} \quad -2ab - 8a^{-1} + 2b^{-1}$$

$$54. (3x^3 - 2x^2 - 13x + 10) \div (x-2)$$

จัดรูปพหุนาม แบบตั้งหารได้

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x - 5 \\ x-2 \overline{) 3x^3 - 2x^2 - 13x + 10} \\ \underline{3x^3 - 6x^2} \\ 4x^2 - 13x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ -5x + 10 \\ \underline{-5x + 10} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $(3x^3 - 2x^2 - 13x + 10) \div (x-2) = 3x^2 + 4x - 5$

$$55. (-2x^4 - 6x^2 + 3x^3 - 1) \div (2x+1)$$

จัดรูปพหุนามตั้งหารได้

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\ 2x+1 \overline{) -2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 0x^1 - 1} \\ \underline{-2x^4 - 1x^3} \\ 4x^3 - 6x^2 \\ \underline{4x^3 + 2x^2} \\ -8x^2 + 0x^1 \\ \underline{-8x^2 - 4x} \\ 4x - 1 \\ \underline{4x + 2} \\ -3 \end{array}$$

ดังนั้น $(-2x^4 - 6x^2 + 3x^3 - 1) \div (2x+1) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \text{ เศษ } -3$

แบบฝึกหัด เรื่อง การหารพหุนาม

$$56. 63x^4y^2z^7 + 9x^4y^2z^7 = \frac{63x^4y^2z^7}{1 \cdot 9x^4y^2z^7} \quad \text{จัดให้อยู่ในรูปการหารเศษส่วน}$$

$$= 7z^7$$

$$57. (6a^2x^3 - 3ax^4) \div 3ax^2 \quad \text{ให้ใช้การดึงตัวประกอบพหุนามตัวหน้า} \quad \text{เมท: } 6a^2x^3 - 3ax^4 = 3ax^2(2a-x)$$

ดังนั้น $\frac{6a^2x^3 - 3ax^4}{3ax^2} = \frac{3ax^2(2a-x)}{3ax^2}$ จะตัดทอนเศษส่วนได้นอที่

$$= 2a - x$$

$$58. (-24a^4 - 32a^3) \div (-8a^3) = \frac{-24a^4 - 32a^3}{-8a^3} = \frac{-8a^3(3a+4)}{-8a^3} = 3a+4$$

$$59. (3x^6 - 6x^4 - 3x^3) \div 3x^3 = \frac{3x^3(x^3 - 2x - 1)}{3x^3} = x^3 - 2x - 1$$

$$60. (2a^2 - ab - 3ac) \div -a = \frac{a(2a - b - 3c)}{-a} = -2a + b + 3c$$

$$61. (a^3 - a^2b^2 + a^4b) \div a^2 = \frac{a^2(a - b^2 + a^2b)}{a^2} = a - b^2 + a^2b$$

$$62. (3m^3 - 9m^2n + 12mn^3) \div (-3m) = \frac{3m(m^2 - 3mn + 4n^3)}{-3m} = \frac{m^2 - 3mn + 4n^3}{-1}$$

$$64. (3a^3 - 7a^2 - a) \div (a^2 - 3a - 2)$$

ข้อนี้ จะลากเป็นตัวหารยาวเศษ-ส่วน ไม่ได้แล้ว เพราะเป็น มนุญาม ÷ มนุญาม
ต้องตั้งหาร จะง่ายที่สุด ;

$$\begin{array}{r} 3a+2 \\ a^2-3a-2 \overline{) 3a^3-7a^2-a} \\ \underline{3a^3-9a^2-6a} \\ 2a^2+5a \\ \underline{2a^2-6a-4} \\ 11a+4 \end{array}$$

เรียงพจน์ที่มีกำลังมากไปหาพจน์-
กำลังน้อย ทั้งเศษ และส่วน

→ เศษบรรทัด
เพราะ หารไม่ลงตัว

ดังนั้น $(3a^3 - 7a^2 - a) \div (a^2 - 3a - 2) = 3a + 2$ เศษ $11a + 4$

$$65. (6b^3 - 11b^2 + 6b - 1) \div (2b^2 - 3b + 1)$$

$$= \begin{array}{r} 3b-1 \\ 2b^2-3b+1 \overline{) 6b^3-11b^2+6b-1} \\ \underline{6b^3-9b^2+3b} \\ -2b^2+3b-1 \\ \underline{-2b^2+3b-1} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $(6b^3 - 11b^2 + 6b - 1) \div (2b^2 - 3b + 1) = 3b - 1$

69. $(c^5 - 2c^4 - 4c^3 + 19c^2) \div (c^3 - 7c + 5)$

จัดรูปการหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 c^2 - 2c + 3 \\
 c^3 - 7c + 5 \overline{) c^5 - 2c^4 - 4c^3 + 19c^2 + 0c^1 + 0c^0} \\
 \underline{c^5 - 7c^3 + 5c^2} \\
 -2c^4 + 3c^3 + 14c^2 + 0c^1 \\
 \underline{-2c^4 + 14c^2 - 10c^1} \\
 3c^3 + 10c^1 + 0c^0 \\
 \underline{3c^3 - 21c + 15} \\
 31c - 15
 \end{array}$$

หารไม่ลงตัว

ดังนั้น $(c^5 - 2c^4 - 4c^3 + 19c^2) \div (c^3 - 7c + 5) = c^2 - 2c + 3$ เศษ $31c - 15$

70. $(81x^4 - 1) \div (3x - 1)$

จัดรูปแบบการหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\
 3x - 1 \overline{) 81x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 - 1x^0} \\
 \underline{81x^4 - 27x^3} \\
 27x^3 + 0x^2 \\
 \underline{27x^3 - 9x^2} \\
 9x^2 + 0x^1 \\
 \underline{9x^2 - 3x} \\
 3x - 1 \\
 \underline{3x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

หารลงตัว

ดังนั้น $(81x^4 - 1) \div (3x - 1) = 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1$

71. $(4x^5 - 29x - 36 + 8x^2 - 7x^3 + 6x^4) \div (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$

จัดรูปแบบการหารได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 4x^2 + 14x + 9 \\
 x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \overline{) 4x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 29x - 36} \\
 \underline{4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 16x^2} \\
 14x^4 - 19x^3 + 24x^2 - 29x \\
 \underline{14x^4 - 28x^3 + 42x^2 - 56x} \\
 9x^3 - 18x^2 + 27x - 36 \\
 \underline{9x^3 - 18x^2 + 27x - 36} \\
 0
 \end{array}$$

ดังนั้น $(4x^5 - 29x - 36 + 8x^2 - 7x^3 + 6x^4) \div (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) = 4x^2 + 14x + 9$

72. $(1 - a^3 + 3a^4 + a^9) \div (1 - a + a^3)$

จัดรูปแบบการตั้งหารได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} a^9 + 0a^8 + 0a^7 + 0a^6 + 0a^5 + 3a^4 - 1a^3 + 0a^2 + 0a^1 + 1 \\ \hline a^3 - a + 1 \end{array}$$

จะเห็นว่า ระหว่างเทอม a^9 กับเทอม a^4 ที่มีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ใช่ 0 ต้องสมมุติ เทอม $a^8 \rightarrow a^5$ ให้มีสัมประสิทธิ์เท่ากับ 0 เพื่อเป็นตัวตั้งในขอลบ เพื่อทำการหารพหุนาม ;

$$\begin{array}{r} a^6 + a^4 - a^3 + a^2 + a + 1 \\ a^3 - a + 1 \overline{) a^9 + 0a^8 + 0a^7 + 0a^6 + 0a^5 + 3a^4 - 1a^3 + 0a^2 + 0a^1 + 1} \\ \underline{a^9 - 1a^7 + 1a^5} \\ 1a^7 - 1a^6 + 0a^5 + 3a^4 \\ \underline{1a^7 - 1a^5 + 1a^4} \\ -1a^6 + 1a^5 + 2a^4 - 1a^3 \\ \underline{-1a^6 + 1a^4 - 1a^3} \\ 1a^5 + 1a^4 + 0a^3 + 0a^2 \\ \underline{1a^5 - 1a^3 + 1a^2} \\ +1a^4 + 1a^3 - 1a^2 + 0a^1 \\ \underline{+1a^4 - 1a^2 + a^1} \\ +1a^3 - 1a^1 + 1 \\ \underline{+1a^3 - 1a^1 + 1} \\ \hline 0 \end{array}$$

ดังนั้น $(1 - a^3 + 3a^4 + a^9) \div (1 - a + a^3) = a^6 + a^4 - a^3 + a^2 + a + 1$

73. $(a^3 - b^3 - c^3 - 3abc) \div (a - b - c)$

จัดรูปแบบการตั้งหารได้

$$\begin{array}{r} a^2 \\ a - b - c \overline{) a^3 - b^3 - c^3 - 3abc} \\ \underline{a^3 - a^2b - a^2c} \\ -b^3 - c^3 - 3abc + a^2b + a^2c \end{array}$$

แบบทดสอบ เรื่องพหุนาม

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ข้อใด เป็นเอกนามทุกจำนวน

1. $\frac{3x^2}{x}, 2^{-2}x^{-1}, \sqrt{3x^2}, x^3y^2$

2. $0, \frac{-3x^2y^3z}{y}, \frac{8xy^{-1}z^2}{y}$

3. $\frac{abc}{4}, 0, x^2y^3z^4, \frac{x^2+y^2}{x}$

* $-\sqrt{2}xyz, \frac{ax^2}{x^2} - \frac{ay^2}{y^2}, \left(\frac{x^2y}{z^{-2}}\right)^2$

2. เอกนามในข้อใด มีดีกรีสูงสุด

1. $\frac{-2x^2y^2z}{xy}$

2. $\frac{2^2a^2b^3c^2}{a^2c}$

3. $-4^{-3}a^2b^3c$

* $\frac{abc^23}{-5a^{-3}}$

3. ดีกรีของพหุนาม $\frac{1}{2}x^5 + y^2 - z^7 - 3y^3$ เป็นเท่าใด

1. 5

* 7

3. 10

4. 17

$$\begin{aligned} 4. (2x^2 + x - 3) + (2x - 3) + (3x^2 + 2) &= 2x^2 + x - 3 + 2x - 3 + 3x^2 + 2 \\ &= 2x^2 + 3x^2 + x + 2x - 3 - 3 + 2 \\ &= 5x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. (2xy + 5yz - 4x) + (2x - 4xy - 6yz) + (6yz + 4x - 4xy) \\ &= 2xy + 5yz - 4x + 2x - 4xy - 6yz + 6yz + 4x - 4xy \\ &= 2xy - 4xy - 4xy + 5yz - 6yz + 6yz - 4x + 2x + 4x \\ &= -6xy + 5yz + 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. (2x^2 + x - 2) - (x^2 - 3x) &= 2x^2 + x - 2 - x^2 + 3x \\ &= 2x^2 - x^2 + x + 3x - 2 \\ &= 1x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. (x^2 + 2x) + (2x^2 - x + 2) - (x^2 - 2x) &= x^2 + 2x + 2x^2 - x + 2 - x^2 + 2x \\ &= \cancel{x^2} + 2x^2 - \cancel{x^2} + 2x - x + 2x + 2 \\ &= 2x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. 3x + 4y + 3\{x - 2(y - x) - y\} &= 3x + 4y + 3\{x - 2y + 2x - y\} \\ &= 3x + 4y + 3x - 6y + 6x - 3y \\ &= 3x + 3x + 6x + 4y - 6y - 3y \\ &= 12x - 5y \end{aligned}$$

$$17. \frac{14x^2 - 21x^3}{7x^2} = \frac{14x^2}{7x^2} - \frac{21x^3}{7x^2} = 2 - 3x$$

$$18. \frac{15ab^2 - 9a^2b}{3ab} = \frac{15ab^2}{3ab} - \frac{9a^2b}{3ab} = 5b - 3a$$

19. จงพิจารณาว่า การหารแบบคูณ กับแบบหาร ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง

1. $\frac{2x^6 - 4x^5 + 2}{x^3}$ หารไม่ลงตัว มีเศษ = $\frac{2}{x^3}$ จริงไหม?

ถูกต้อง ; $\frac{2x^6 - 4x^5 + 2}{x^3} = \frac{2x^6}{x^3} - \frac{4x^5}{x^3} + \frac{2}{x^3} = 2x^3 - 4x^2 + \frac{2}{x^3}$ เศษของเศษ?

ถามว่า การตั้งหารธรรมดา แล้วยังค้างเศษ $\frac{2}{x^3}$ แล้ว $\frac{2}{x^3}$ คือเศษไหม?
สองตัวหารลงตัว ;

$$x^3 \overline{) 2x^6 - 4x^5 + 2}$$

$$\underline{2x^6}$$

$$-4x^5$$

$$\underline{-4x^5}$$

$$\underline{\quad\quad} + 2 \leftarrow \text{นี่คือ เศษของเศษตัวจริง}$$

แสดงให้เห็น 2 อย่างคือ ;

- 1) ข้อนี้ ไม่ถูกต้อง
- 2) ออกๆ เศษของเศษ ตัวจริง จะเป็นผลลัพธ์ ได้อย่างชัดเจน

2. $\frac{2x^6 - 4x^5 - x^2 + 1}{x^3}$ เป็นการหารลงตัว จริงไหม?

ตั้งหารเลย $x^3 \overline{) 2x^6 - 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x^1 + 1}$

$$\underline{2x^6}$$

$$-4x^5$$

$$\underline{-4x^5}$$

$$\underline{\quad\quad} -x^2 + 1 \rightarrow \text{เศษของเศษ หรือ หารไม่ลงตัว!}$$

∴ ข้อนี้ ไม่จริงครับ

3. $\frac{2x^6 - 4x^5 + x^2 + x}{x^2}$ เป็นการหารไม่ลงตัว และมีเศษ คือ x

ตั้งหารได้ $x^2 \overline{) 2x^6 - 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 + x}$

$$\underline{2x^6}$$

$$-4x^5$$

$$\underline{-4x^5}$$

$$\underline{\quad\quad} x^2 + x$$

$$\underline{x^2}$$

$$\underline{\quad\quad} x$$

จากบทหารข้างต้น $\frac{2x^6 - 4x^5 + x^2 + x}{x^2} = 2x^4 - 4x^3 + 1$ เศษ 1

✓ ทำให้ ข้อนี้ ถูกต้อง นะครับ ✓

และมาดูข้อสุดท้าย ที่เราคาดว่า ข้อนี้ไม่ถูกด้วย

4. $\frac{2x^6 - 4x^5 + x^2 - x}{x^2}$ เป็นพหุนามไม่ลงตัว มีเศษคือ -1

โจทย์นี้เนี่ยมันตัวเลือกที่ 3 ซึ่งเป็นการหารไม่ลงตัว ที่มีเศษคือ 1
ดังนั้น ตัวเลือกนี้ ผิดครับ

20. $4x^4 - 10x - 9x^2 - 10$ หารด้วย $2x + 3$ เท่ากับเท่าใด?

ตัวหารได้

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 5 \\ 2x+3 \overline{) 4x^4 + 0x^3 - 9x^2 - 10x - 10} \\ \underline{4x^4 + 6x^3} \\ -6x^3 - 9x^2 \\ \underline{-6x^3 - 9x^2} \\ -10x - 10 \\ \underline{-10x - 15} \\ +5 \end{array}$$

ดังนั้น $4x^4 - 10x - 9x^2 - 10$ หารด้วย $2x + 3$ ได้ผลลัพธ์ $2x^3 - 3x^2 - 5$ เศษ $+5$

21. ถ้า A, B, C และ D แทนพหุนาม โดยที่ดีกรีของ B มากกว่าดีกรีของ D และ $A = BC + D$

กำหนดให้ $A = 2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1$, $B = -x^2 + x + 1$ แล้ว จงหาว่า C และ D เท่ากับเท่าไร

1. $C = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19$, $D = 29x + 20$
2. $C = -2x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 10x - 19$, $D = 0$
3. $C = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x + 19$, $D = 9x + 20$
4. $C = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19$, $D = -18$

จากตัวเลือกที่แถมฝึกหัดกำหนดมาให้ จะเห็นว่ารูป C นั้นคล้ายกัน คือ $C = -2x^4 - 2x^3 \pm 9x^2 \pm 10x \pm 19$
ด้วยคณที่เหมือนกัน $-9x^2 - 10x$ มีถึง 3 ตัวเลือก เราจึงเลือกทำแบบนี้ก่อน

แบบที่ 1 ให้ $C = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19$ คูณกับ $B = -x^2 + x + 1$

ตัวคูณได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19 \\ \times \\ -x^2 + x + 1 \\ \hline -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19 \\ + \\ -2x^5 - 2x^4 - 9x^3 - 10x^2 - 19x \\ + \\ +2x^6 + 2x^5 + 9x^4 + 10x^3 + 19x^2 \\ + \\ +2x^6 + 0 + 5x^4 - 1x^3 + 0 - 29x - 19 \end{array}$$

หรือ $2x^6 + 5x^4 - x^3 - 29x - 19$

แล้วนำ $2x^6 + 5x^4 - x^3 - 29x - 19$ มาบวกกับ $D = 29x + 20$

$$= 2x^6 + 5x^4 - x^3 - \cancel{29x} - \cancel{19} + \cancel{29x} + \cancel{20} + 1 = 2x^6 + 5x^4 - x^3 + 1 = \text{โจทย์พอดี}$$

ดังนั้น ข้อนี้ ตอบตัวเลือกที่ 1. คือ $C = -2x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 10x - 19$, $D = 29x + 20$

22. ในการหารพหุนาม ถ้าตัวหารคือ $x+5$ ได้ผลหาร x^2-2x เศษ 3 จงหาตัวตั้ง

วิธีทำ จากรูปการหารทั่วไป $\frac{A}{B} = C$ ได้เศษ D ซึ่งการหารทุกครั้ง อาจมีเศษ หรือไม่มีก็ได้
 เช่น $\odot \frac{6}{2} = 3$ ได้เศษ = 0 เพราะหารลงตัว ดังนั้น $6 = 3(2)$
 $\odot \frac{8}{3} = 2$ ได้เศษ = 2 เพราะหารไม่ลงตัว ดังนั้น $8 = 3(2) + 2$ (เศษ)

ดังนั้น จากรูปการหารทั่วไป ; $\frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$
 ดังนั้น $A = (B)(C) + D$
 ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหาร เศษ

จากโจทย์ ถ้าตัวหาร (B) คือ $x+5$
 ผลหาร (C) คือ x^2-2x
 เศษ (D) คือ 3 } ดังนั้น รูปแบบการหารที่พิจารณาเศษ จัดได้ดังนี้
 $A = (x+5)(x^2-2x) + 3$
 $= (x+5)(x^2) - (x+5)(2x) + 3$
 $= x^3 + 5x^2 - 2x^2 - 10x + 3$
 $= x^3 + 3x^2 - 10x + 3$ จบ

23. ถ้า $1+a$ หาร a^3+3a^2+ka+2 แล้วเหลือเศษ 9 แล้ว ค่า k เท่ากับข้อใด?

วิธีทำ ข้อนี้ยากตรงที่ โจทย์ไม่บอกว่าเป็นผลสัมฤทธิ์การหารเป็นเท่าใด?
 จึงใช้หฤษฎีบทเศษเหลือครับ ;

จาก $1+a$ หรือ $a+1 = 0$ จะได้ $a = -1$
 ถ้า $a = -1$ แทนในพหุนาม a^3+3a^2+ka+2 แล้วให้ค่าเท่ากับเศษ คือ +9
 จะได้ $(-1)^3 + 3(-1)^2 + k(-1) + 2 = +9$
 $-1 + 3 - k + 2 = +9$
 $-k + 4 = +9$
 $-k = +9 - 4 = +5$
 $\therefore k = -5$

สังเกตว่า เราสามารถหาค่า $k = -5$ ได้เลย หวังๆ ที่เขาไม่ (จำเนิ่นต้อง) รู้เลยว่า ผลหารเป็นเท่าใด
 จบ

24. ถ้า $x + \frac{1}{x} = 7$ แล้ว $x^2 + \frac{1}{x^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร?

วิธีที่ 1 นิยาม $\frac{x+1}{x} = 7$
 $x^2+1 = 7x$
 $x^2+1 = 7x$
 $x^2-7x+1 = 0$
 ซึ่งหาค่า x ไม่ได้
 วิธีนี้จึงใช้ไม่ได้

วิธีที่ 2 ยกกำลังสองทั้งสองข้าง ;
 $(x + \frac{1}{x})^2 = 7^2$
 $x^2 + 2(x)(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2 = 49$
 $x^2 + 2 + (\frac{1}{x})^2 = 49$
 ดังนั้น $x^2 + \frac{1}{x^2} = 49 - 2 = 47$

จบ

25. Find A, B, C such that $(2x-1)(3x^2-2x+5) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 35$ in $\mathbb{R}[x]$

Expand: $(2x-1)(3x^2-2x+5) = (2x-1)(3x^2) - (2x-1)(2x) + (2x-1)(5)$

$= 6x^3 - 21x^2 + 14x + 10x - 35$

$= 6x^3 - 25x^2 + 24x - 35$

$= Ax^3 + Bx^2 + Cx - 35$

So $A = 6$

$b = -25$

$c = 24$

26. Prove that $x * y = xy$ for $x > 0, y > 0$ in $\mathbb{R} > 0$, $b > 0$ has $c > 0$ and $(a * b) * c$ is the

definition $(a * b) * c$ is

$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}$

is $(a * b) * c = \frac{a+b}{ab} * c = \frac{a+b}{ab} \cdot c$

$\frac{\frac{a+b}{ab} + \frac{1}{c}}{\frac{a+b}{ab}}$

$= \frac{\frac{a+b}{ab} + \frac{1}{c}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{ab + ac + bc}{ab}$

$= \frac{a+b}{abc} * \frac{ab+ac+bc}{ab} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$ now

27. In $\mathbb{R}[x]$ find A, B, C such that $A(x-B)^2 + C = 2x^2 + 3x + 2$ in $\mathbb{R}[x]$

Expand $A(x-B)^2 + C = A(x^2 - 2xB + B^2) + C = Ax^2 - 2ABx + AB^2 + C$

Compare coefficients:

- $Ax^2 - 2ABx + AB^2 + C = 2x^2 + 3x + 2$
- $Ax^2 - 2ABx + AB^2 + C = Ax^2 - 2xB + B^2 + C$

- ① $A = 2$
- ② $-2AB = 3$
- ③ $AB^2 + C = 2$

From ① $B = 3$

From ② $B = -\frac{3}{2}$

④ $B = -\frac{3}{2}$

From ③ $A + \frac{9}{4} = 2 + 2(-\frac{3}{2}) \cdot \frac{3}{2} = 2 - 6 = -4$ now

From ③ $(2)(-\frac{3}{2}) + C = 2$

From ② $(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}) + C = 2$

From ① $2 - 2 = -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

28. ถ้าหาร $x^4 - 3x$ ด้วยพหุนาม $Ax^2 + Bx + C$ โดยที่ A, B, C เป็นค่าคงตัว แล้วได้ผลหารเป็น $(x-1)^2$ และมีเศษเหลือพหุนาม $x-3$ จะได้ $A^2 + B^2 + C^2$ มีค่าเท่าใด

จากรูปแบบ $\frac{\text{ตัวตั้ง}}{\text{ตัวหาร}} = \text{ผลหาร} + \frac{\text{เศษ}}{\text{ตัวหาร}}$ ดังนั้น $\text{ตัวหาร} = \frac{\text{ตัวตั้ง} - \text{เศษ}}{\text{ผลหาร}}$

ลองแทนค่า จากโจทย์ จะได้ $\frac{x^4 - 3x}{Ax^2 + Bx + C} = (x-1)^2 + (x-3)$ โดยที่ $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

ดังนั้น $Ax^2 + Bx + C = \frac{x^4 - 3x - (x-3)}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^4 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

เขียนในรูปการตั้งหารได้

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \overline{) x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 4x + 3} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + x^2} \\ 2x^3 - x^2 - 4x \\ \underline{2x^3 - 4x^2 + 2x} \\ 3x^2 - 6x + 3 \\ \underline{3x^2 - 6x + 3} \\ 0 \end{array}$$

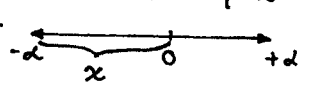
จึง $1x^2 + 2x + 3 = Ax^2 + Bx + C$ ดังนั้น $A = 1 ; B = 2 ; C = 3$
 จะได้ $A^2 + B^2 + C^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

ตอบ

29. ถ้า $x \leq 0$ แล้ว เศษของกรรหกร $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$ ด้วย $x^2 + x - 6$ มีค่าที่น้อยที่สุดเป็นเท่าใด

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 16 \\ x^2 + x - 6 \overline{) 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12} \\ \underline{2x^4 + 2x^3 - 12x^2} \\ -9x^3 + 7x^2 + 28x \\ \underline{-9x^3 - 9x^2 + 54x} \\ 16x^2 - 26x - 12 \\ \underline{16x^2 + 16x - 96} \\ -42x + 84 \end{array}$$

จากกรรหกรข้างต้น ได้เศษของกรรหกรคือ $-42x + 84$ ซึ่ง $x \leq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ มีค่ามากที่สุด} = 0 \\ \text{และค่าจะน้อยลงเรื่อยๆ ถึง} -\infty \end{array} \right.$



พิจารณา $-42x + 84$ ถ้าเราแทนค่า x ด้วยจำนวนติดลบ เช่น $-1, -2, -3 ;$

$-42(-3) + 84 = 42(3) + 84 = 216$
 $-42(-2) + 84 = 42(2) + 84 = 168$
 $-42(-1) + 84 = 42(1) + 84 = 126$

• ชื่อแทนจำนวนติดลบ ที่ค่าน้อยมากที่สุด ค่า $-42x + 84$ ชื่อมากที่สุด
 • จำนวนติดลบที่มากที่สุดที่แทนใน x แล้วทำให้ $-42x + 84$ มีค่าน้อยที่สุด คือ -1

ดังนั้น ค่า x ที่แทนใน $-42x + 84$ แล้วทำให้เกิดค่าน้อยที่สุด คือ $x = 0$

เพราะ $x = 0$ ทำให้ $-42x + 84 = -42(0) + 84 = 84$ นั่นเอง

ตอบ

30. ถ้า $(a + \frac{1}{a})^2 = 3$ แล้ว $a^3 + \frac{1}{a^3} = ?$

จาก $(a + \frac{1}{a})^2 = 3$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}$

แล้วยกกำลัง 3 ทั้งสองข้าง ; $(a + \frac{1}{a})^3 = \sqrt{3}^3$

$a^3 + 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} = 3\sqrt{3}$ โดย $3a + \frac{3}{a} = 3(a + \frac{1}{a}) = 3\sqrt{3}$

จะได้ $a^3 + 3\sqrt{3} + \frac{1}{a^3} = 3\sqrt{3}$

ดังนั้น $a^3 + \frac{1}{a^3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$

จบ

ในบทที่ 2 เรื่องพหุนาม นี้ มีกำหนดให้นักเรียนทำ 102 ข้อ ขอให้น้องๆ ใช้คืนบรรณารักษ์ ในการทำแบบฝึกหัดส่วนท้ายของน้องๆ นะครับ

"ตามสำเร็จ อยู่ในมือของคนงาน"

Anakin

July 3rd, 2005

