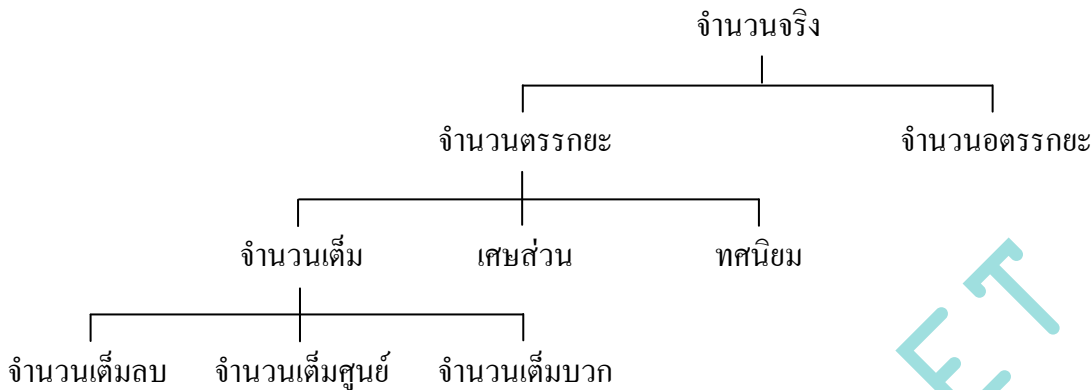


บทที่ 5 จำนวนจริง

1. จำนวนจริง (Real Number)

จำนวนจริงประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ แสดงได้ด้วยโครงสร้างของระบบจำนวนจริง (The Real Number System) ดังนี้



2. จำนวนตรรกยะ (Rational Number)

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ หรืออยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

เช่น จำนวนเต็ม $-3, 2, 5, 8$

เศษส่วน $-\frac{9}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{13}$

ทศนิยม $-0.27, 7.403, 3.76$ เป็นต้น

การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม โดยทั่วไปใช้วิธีการนำส่วนไปหารเศษ โดยการหารยาวแบบธรรมดา

ตัวอย่าง จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปทศนิยม

(1.) $\frac{5}{8}$

(2.) $\frac{13}{16}$

(3.) $\frac{2}{3}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8 \overline{)50} \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.8125 \\ 16 \overline{)130} \\ \underline{128} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.66... \\ 3 \overline{)20} \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่ามิตศนิยมอยู่ 2 แบบ คือ

1. **ทศนิยมรู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนรู้จบ หรือมีศูนย์ซ้ำ เช่น 0.6250 , 0.81250 , 0.3 , 3.735 เป็นต้น

2. **ทศนิยมไม่รู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนไม่รู้จบ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

2.1 **ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ** ได้แก่ ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมตัวหนึ่งหรือมากกว่าซ้ำกันอย่างเป็นระบบ เช่น

$$-2.3666\dots = -2.\dot{3}6$$

$$0.757575\dots = 0.\dot{7}5$$

$$3.235353535\dots = 3.2\dot{3}5 \quad \text{เป็นต้น}$$

2.2 **ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ** ได้แก่ ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมมากมายแบบไม่เป็นระบบ และไม่ซ้ำกันเลย เช่น

$$1.4142135\dots, 2.3764853287\dots \quad \text{เป็นต้น}$$

(* ทศนิยมแบบนี้อยู่ในเซตของจำนวนอตรรกยะนั่นเอง)

การเขียนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน ต้องเป็นทศนิยมรู้จบ และทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำกันเท่านั้น

1. การเขียนทศนิยมรู้จบ (ทศนิยมซ้ำศูนย์) ให้เป็นเศษส่วนนั้น ทำได้โดยการทำให้เป็นเลขพหุคูณของ 10 ขึ้นอยู่กับว่าจำนวนนั้นมีทศนิยมกี่ตำแหน่ง เช่น

$$0.4 = \frac{4}{10}$$

$$2.37 = \frac{237}{100}$$

$$0.067 = \frac{67}{1,000}$$

2. การเขียนทศนิยมแบบซ้ำ ให้เป็นเศษส่วน ทำได้ดังวิธีต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

$$(1.) 0.\dot{7} \quad \text{วิธีทำ} \quad \text{ให้ } N = 0.\dot{7} \\ = 0.777\dots \quad (1)$$

คูณสมการที่ (1) ด้วย 10 จะได้

$$10N = 7.777\dots \quad (2)$$

$$(2)-(1) ; 10N - N = 7.777\dots - 0.777\dots$$

$$9N = 7$$

$$\therefore N = \frac{7}{9}$$

$$\text{ดังนั้น } 0.\dot{7} \quad \text{จึงมีค่าเท่ากับ } \frac{7}{9}$$

ตอบ

$$(2.) 1.\dot{2}\dot{3} \quad \text{วิธีทำ} \quad \text{ให้ } N = 1.\dot{2}\dot{3}$$

$$= 0.1232323\dots \quad (1)$$

คูณสมการที่ (1) ด้วย 100 จะได้

$$100N = 123.232323\dots \quad (2)$$

$$(2)-(1) ; 100N - N = 123.23\dots - 1.23\dots$$

$$99N = 122$$

$$\therefore N = \frac{122}{99}$$

$$\text{ดังนั้น } 1.\dot{2}\dot{3} \quad \text{จึงมีค่าเท่ากับ } \frac{122}{99}$$

ตอบ

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การเขียนทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำให้เป็นเศษส่วนนั้น สามารถทำได้ด้วยวิธีลัด โดยใช้หลักการดังนี้

| |
|--|
| $\frac{\text{เศษส่วน}}{\text{ส่วน}} = \frac{\text{เลขทั้งหมด} - \text{เลขตัวที่รู้จบ}}{\text{(เลข 9 ซึ่งมีจำนวนเท่ากับทศนิยมไม่รู้จบ)}}$ |
|--|

สำหรับทศนิยมไม่รู้จบล้วน ๆ จากหลักการดังกล่าว สามารถสรุปง่าย ๆ โดยให้เขียนจำนวนที่เป็นเลขหลังจุดทศนิยมเป็นเศษ แล้วส่วนเป็น 9 ซึ่งจำนวนของเลข 9 ที่เป็นส่วน จะเท่ากับจำนวนตัวเลขที่อยู่หลังจุดนั้น

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

$$(1.) 0.\dot{5}\dot{7} = \frac{57}{99}$$

$$(2.) 13.\dot{2}\dot{6}\dot{8} = 13\frac{268}{999}$$

$$(3.) 3.\dot{8}\dot{6}\dot{0}\dot{9} = 3\frac{8609}{9999}$$

ตอบ

* จะสามารถทำตัวอย่างต่อไปนี้ได้ง่าย ๆ ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} 0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1 \\ 6.\dot{9}\dot{9} = 6\frac{99}{99} = 7 \\ 2.\dot{9}\dot{9}\dot{9} = 2\frac{999}{999} = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{จะเห็นว่า ถ้าส่วนทศนิยมเป็นรูปแบบของ } 0.\dot{9}, 0.\dot{9}\dot{9}, 0.\dot{9}\dot{9}\dot{9} \\ \text{ค่าของจำนวนจะถูกปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็มบวกตัวแรก คือ เลข 1} \end{array}$$

ทศนิยมไม่รู้จบแบบผสม คือ ทศนิยมที่มีทั้งแบบรู้จบ และไม่รู้จบอยู่ในจำนวนเดียวกัน จากหลักการสามารถสรุปง่าย ๆ โดยการนำตัวเลขหลังจุดทศนิยมทั้งหมดตั้ง ลบด้วยตัวเลขที่เป็นทศนิยมรู้จบ แล้วหารด้วย 9 ซึ่งมีจำนวนเท่ากับตัวเลขที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ แล้วเติมศูนย์หลังเลข 9 ตามจำนวนทศนิยมที่รู้จบ

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

$$\begin{aligned} (1.) 0.2\dot{5} &= \frac{25 - 2}{90} = \frac{23}{90} \\ (2.) 1.2\dot{7}\dot{4} &= 1 + \frac{274 - 27}{900} = 1 + \frac{247}{900} \\ (3.) 14.2\dot{3}\dot{5} &= 14 + \frac{235 - 2}{990} = 14 + \frac{233}{990} \end{aligned}$$

ตอบ

3. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ หรือไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำได้ แต่สามารถหาค่าประมาณในรูปของทศนิยมซ้ำ หรือเศษส่วนได้ ตัวอย่างเช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $3\sqrt{13}$, π , $0.676776777\dots$ เป็นต้น

| | | |
|--------------|-----------------------------|---|
| พิจารณาจำนวน | $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$ | } จะเห็นว่า เลขทุกจำนวนเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ หมายถึง ไม่สามารถหาค่าที่แท้จริงได้นั่นเอง |
| | $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$ | |
| | $\sqrt{5} = 2.2360679\dots$ | |
| | $\pi = 3.14159265\dots$ | |

ดังนั้น ในการคำนวณทศนิยมใช้จำนวนอตรรกยะเป็นค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะ เช่น

| | |
|---------------------------|-----------------------------|
| $\frac{22}{7}$ หรือ 3.142 | เป็นค่าประมาณของ π |
| 1.414 | เป็นค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ |
| 1.732 | เป็นค่าประมาณของ $\sqrt{3}$ |

เนื่องจากจำนวนอตรรกยะทุกจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน สำหรับจำนวนอตรรกยะก็สามารถแทนได้โดยจุดบนเส้นจำนวนเช่นเดียว

การหาจุดที่แทนที่ π บนเส้นจำนวน

| |
|---|
| $\therefore \pi = \frac{\text{ความยาวรอบรูปวงกลม}}{\text{ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง}}$ |
|---|

เนื่องจากวงกลมทุกวงจะมีรูปแบบอัตราส่วนข้างต้นนี้เหมือนกันหมด แต่เศษส่วนข้างต้นจะไม่สามารถเขียนเป็นจำนวนตรรกยะได้ จึงมีการหาอัตราส่วนต่ำสุดที่เป็นรูปการหารของเลขจำนวนเต็มทั้งเศษและส่วน และพบว่าถ้ากำหนดความยาวรอบรูปวงกลมเป็น 22 หน่วย จะทำให้ได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 7 หน่วยพอดี (ซึ่งถ้าความยาวรอบรูปวงกลมเป็นเลขจำนวนเต็มตัวอื่น ก็จะไม่ได้รับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นจำนวนเต็ม) ทำให้ $\frac{22}{7}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำของค่า π โดยเราใช้ π เพื่อหาค่าต่อไปนี้

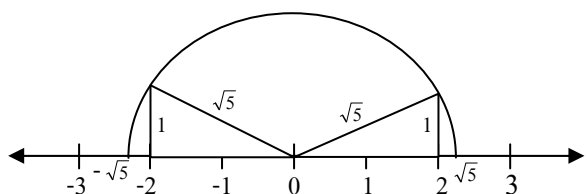
$$\text{ความยาวรอบรูปวงกลม} = 2\pi r$$

$$\text{พื้นที่วงกลม} = \pi r^2$$

$$\text{พื้นที่ผิวทรงกลม} = 4\pi r^2$$

$$\text{ปริมาตรทรงกลม} = \frac{4}{3}\pi r^2 \quad \text{เป็นต้น}$$

การหาจุดบนเส้นจำนวนที่แทน $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ ใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสช่วยหาจุดบนเส้นจำนวน ดังนี้



จากสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 2 หน่วย และ 1 หน่วย ให้หาด้านตรงข้ามมุมฉาก (แทนค่าด้วย x)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^2 &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \pm\sqrt{5} \text{ นั่นเอง}$$

นั่นคือ จำนวนอตรรกยะทุกจำนวนแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนได้ เช่นเดียวกับจำนวนตรรกยะ จึงเรียกเส้นจำนวนนั้นว่า “เส้นจำนวนจริง”

4. สมบัติของจำนวนจริง

สมบัติการบวกของจำนวนจริง ให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

1. $a + b$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิด)
2. $a + b = b + a$ (สมบัติการสลับที่)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $a + 0 = a = 0 + a$ นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก
5. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ นั่นคือ $-a$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ a

สมบัติการคูณของจำนวนจริง ให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

1. $a \times b$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิด)
2. $a \times b = b \times a$ (สมบัติการสลับที่)
3. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $a \times 1 = a = 1 \times a$ นั่นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ
5. $a \times \frac{1}{a} = 1$ เมื่อ $a \neq 0$ นั่นคือ a หรือ $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณซึ่งกันและกัน
6. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ หรือ $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$ (สมบัติการแจกแจงบนการบวก)

5. รากที่สอง (Square Root)

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

ข้อสังเกต

- ถ้า $a=0$ รากที่สองของ a คือ 0
- รากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่เป็นจำนวนตรรกยะไม่นิยมเขียนรากที่สองของจำนวนนั้นในรูปที่ใช้เครื่องหมาย $\sqrt{\quad}$ เช่น เขียน 15 แทน $\sqrt{225}$ และเขียน -15 แทน $-\sqrt{225}$ เป็นต้น
- รากที่สองของจำนวนจริงบวก จะเป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4

- 1.) รากที่สองของ 25 คือ $\sqrt{25}$ และ $-\sqrt{25}$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{25} = 5 \quad \text{และ} \quad -\sqrt{25} = -5$$

นั่นคือ รากที่สองของ 25 คือ ± 5

- 2.) รากที่สองของ 0.36 คือ $\sqrt{0.36}$ และ $-\sqrt{0.36}$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{0.36} = 0.6 \quad \text{และ} \quad -\sqrt{0.36} = -0.6$$

นั่นคือ รากที่สองของ 0.36 คือ ± 0.6

- 3.) รากที่สองของ 23 คือ $\sqrt{23}$ และ $-\sqrt{23}$

เนื่องจากไม่สามารถหาจำนวนเต็ม หรือเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำที่นำมายกกำลังสองแล้วได้ 23

ทำให้ $\sqrt{23}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตอบ

บทนิยาม

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $\sqrt{a^2} = |a|$ เมื่อ $|a|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ a

ตัวอย่างที่ 5

จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$(1.) -\sqrt{324} = -\sqrt{18^2} = -18$$

$$*(2.) \sqrt{(-14)^2} = |-14| = 14$$

$$**(3.) -\sqrt{c^2 d^4} = -\sqrt{(cd^2)^2} = -|cd^2|$$

ตอบ

ข้อสังเกต

ในรากคู่ใด ๆ แล้ว (เช่นในกรณีรากที่ 2, 4, 6, ...) จำนวนในรากนั้น ๆ ต้องไม่ติดลบ

ดังนั้น *(ข้อ 2) $\sqrt{(-14)^2}$ จะไม่ตอบ -14 และเราสามารถแก้โจทย์นี้ได้อย่างละเอียดได้ดังนี้

$$\sqrt{(-14)^2} = \sqrt{[(-1)(14)]^2} = \sqrt{(-1)^2 \cdot (14)^2} = \sqrt{1(14)^2} = 14 \quad \text{ซึ่งค่าเป็นบวกไม่ติดลบ}$$

** (ข้อ 3) $-\sqrt{c^2 d^4} = -|cd^2|$ เพราะถ้าจำนวนที่อยู่ภายใต้รากที่สองเป็นตัวแปร

จะไม่ถอดออกมานอก $||$ (นอกค่าสัมบูรณ์)

ตัวอย่างที่ 6 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 45 **วิธีทำ** รากที่สองของ 45 คือ $\sqrt{45}$ และ $-\sqrt{45}$
 นั่นคือ $\sqrt{45} = \sqrt{3 \times 3 \times 5} = |3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$
 $-\sqrt{45} = -\sqrt{3 \times 3 \times 5} = -|3\sqrt{5}| = -3\sqrt{5}$
 ดังนั้น รากที่สองของ 45 คือ $3\sqrt{5}$ และ $-3\sqrt{5}$

(2.) 0.0049 **วิธีทำ** รากที่สองของ 0.0049 คือ $\sqrt{0.0049}$ และ $-\sqrt{0.0049}$
 นั่นคือ $\sqrt{0.0049} = \sqrt{(0.07)^2} = |0.07| = 0.07$
 $-\sqrt{0.0049} = -\sqrt{(0.07)^2} = -|0.07| = -0.07$
 ดังนั้น รากที่สองของ 0.0049 คือ 0.07 และ -0.07 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 7 จงหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 1,024 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นบวกของ 1,024 คือ $\sqrt{1,024}$
 นั่นคือ $\sqrt{1,024} = \sqrt{(32)^2} = |32| = 32$
 ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 1,024 คือ 32

(2.) 0.0169 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นบวกของ 0.0169 คือ $\sqrt{0.0169}$
 นั่นคือ $\sqrt{0.0169} = \sqrt{(0.13)^2} = |0.13| = 0.13$
 ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 0.0169 คือ 0.13 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8 จงหารากที่สองที่เป็นลบของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 2,209 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นลบของ 2,209 คือ $-\sqrt{2,209}$
 นั่นคือ $-\sqrt{2,209} = -\sqrt{(47)^2} = -|47| = -47$
 ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 2,209 คือ -47

(2.) 0.0729 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นลบของ 0.0729 คือ $-\sqrt{0.0729}$
 นั่นคือ $-\sqrt{0.0729} = -\sqrt{(0.27)^2} = -|0.27| = -0.27$
 ดังนั้น รากที่สองที่เป็นลบของ 0.0729 คือ -0.27 **ตอบ**

ข้อสังเกต

1. คำว่ารากที่สองของจำนวนใด ๆ จะมีค่า 2 ค่า คือ ค่าเป็นบวกและค่าเป็นลบ ส่วนรากที่สองที่เป็นบวกมีค่าเดียว เช่นเดียวกับรากที่สองที่เป็นลบก็มีค่าเดียว
2. รากที่สองของ $15 \neq \sqrt{15}$ แต่รากที่สองที่เป็นบวกของ $15 = \sqrt{15}$ นั่นคือรากที่สองของ $15 = \pm\sqrt{15}$

สมบัติของ \sqrt{a} เมื่อ $a \geq 0$

| |
|---|
| 1. ถ้า $a \geq 0, b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ |
| 2. ถ้า $a \geq 0, b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ |

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นี้ ให้พิจารณาเรื่องตัวประกอบเป็นสิ่งสำคัญ หากแยกตัวประกอบได้คล่องก็จะแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลลัพธ์ของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (1.) \quad \sqrt{8} + 2\sqrt{3} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2} + 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ &= 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.) \quad \sqrt{3}(3\sqrt{3} - 1) &= (\sqrt{3})(3\sqrt{3}) - (\sqrt{3})(1) \\ &= 3(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \\ &= 3(3) - \sqrt{3} \\ &= 9 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.) \quad 2\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 1) &= (2\sqrt{3})(3\sqrt{3}) - (2\sqrt{3})(1) \\ &= (2)(3)(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \\ &= (2)(3)(3) - 2\sqrt{3} \\ &= 2(9 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.) \quad \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{24}}{2} &= \frac{2\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{2} \\ &= \sqrt{7} - \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3}}{2} \\ &= \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{6}}{2} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5.) \quad \frac{-3\pi}{4} \text{ เมื่อ } \pi \approx 3.14 &= \frac{(-3)(3.14)}{4} \\ &= 2.355 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6.) \quad \sqrt{\frac{729}{2,025}} &= \sqrt{\frac{(27)^2}{(45)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(27)^2}}{\sqrt{(45)^2}} \\ &= \frac{27}{45} \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

การหารากที่สองของจำนวนใด ๆ มีวิธีทั้งหมด 4 แบบ ดังนี้

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 10 จงหารากที่สองของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) 4,096

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{รากที่สองของ } 4,096 &= \pm \sqrt{4,096} \\
 &= \pm \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \\
 &= \pm \sqrt{2^{12}} \\
 &= \pm \sqrt{(2^6)^2} \\
 &= \pm 2^6 \\
 &= \pm 64
 \end{aligned}$$

(2.) 11,025

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{รากที่สองของ } 11,025 &= \pm \sqrt{11,025} \\
 &= \pm \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7} \\
 &= \pm \sqrt{(3 \times 5 \times 7)^2} \\
 &= \pm (3 \times 5 \times 7) \\
 &= \pm 105
 \end{aligned}$$

ตอบ

2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{19}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาจำนวนเต็มบวกสองจำนวนเรียงกัน \rightarrow จำนวนเต็มบวกสองจำนวนนั้นคือ 4 และ 5
 ที่กำลังสองของจำนวนเต็มทั้งคู่มากกว่า
 และน้อยกว่ากำลังสองของ $\sqrt{19}$
 นั่นคือ $4^2 < (\sqrt{19})^2 < 5^2$
 นั่นคือ $4 < \sqrt{19} < 5$

ขั้นที่ 2 นำจำนวนเต็มทั้งสองที่หาได้ในขั้นที่ 1 \rightarrow เฉลี่ย 4 และ 5 จะได้ $\frac{4+5}{2} = 4.5$
 มาหาค่าเฉลี่ย

ขั้นที่ 3 นำค่าเฉลี่ยจากขั้นที่ 2 ไปหาร 19 แล้ว \rightarrow นำค่าเฉลี่ย 4.5 ไปหาร 19 จะได้ $\frac{19}{4.5} \approx 4.22$

นำมาเปรียบเทียบค่า

$$\text{จะได้ } 4.22 \times 4.22 < 19 < 4.5 \times 4.5$$

$$\text{นั่นคือ } (4.22)^2 < \sqrt{19} < (4.5)^2$$

$$\therefore 4.22 < \sqrt{19} < 4.5$$

ขั้นที่ 4 หาค่าเฉลี่ยทั้งสองจำนวนที่หาได้จาก \rightarrow เฉลี่ย 4.22 และ 4.5 จะได้ $\frac{4.22 + 4.5}{2} = 4.36$

ขั้นที่ 2 และ ขั้นที่ 3 อีกครั้ง แล้วนำ

$$\text{นำค่าเฉลี่ย } 4.36 \text{ ไปหาร } 19 \text{ จะได้ } \frac{19}{4.36} \approx 4.358$$

ค่าเฉลี่ยที่ได้ไปหาร 19 นำมาเปรียบเทียบ

$$\text{จะได้ } 4.358 \times 4.358 < 19 < 4.36 \times 4.36$$

ค่าเช่นเดียวกับขั้นที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง

$$\text{นั่นคือ } (4.358)^2 < (\sqrt{19})^2 < (4.36)^2$$

เนื่องจาก $4.358 \approx 4.36$ ดังนั้น ค่าประมาณของ $\sqrt{19}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง คือ 4.36

ตอบ

3. การหารากที่สองจากตาราง (ดูตารางได้จากหนังสือเรียนของตัวเองครับ)

ตัวอย่างที่ 12 จงหาคำรากที่สองที่เป็นบวกของ 33 ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สามโดยใช้ตาราง

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ค่า n ในตารางที่ตรงกับ 33

ขั้นที่ 2 ค่าของ \sqrt{n} ในตารางที่ตรงกับ 33

นั่นคือ $n = 33$

$\sqrt{n} = 5.745$

หมายความว่า $\sqrt{33}$ มีค่าเท่ากับ 5.745

ดังนั้น $\sqrt{33} = 5.745$

ตอบ

4. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร มีหลักการทำดังนี้

- ขั้นที่ 1 นำจำนวนที่ต้องการหารากที่สองมาแบ่งออกเป็นชุด ชุดละ 2 ตัว โดยจำนวนเต็มเริ่มนับจากหลักหน่วยไปทางซ้าย ส่วนทศนิยมเริ่มนับจากตำแหน่งที่ 1 ไปทางขวา เช่น แบ่งเลข 23071.465 ได้เป็น 2, 30, 71.46, 5
- ขั้นที่ 2 นำจำนวนที่ต้องการหารากที่สองมาตั้งหารยาว หาจำนวน 2 จำนวนที่เท่ากันมากคูณกัน ได้ผลลัพธ์เท่ากับจำนวนชุดแรก หรือน้อยกว่าแต่เกือบเท่ากัน แล้วใส่เป็นตัวหารและผลลัพธ์ดำเนินตามวิธีการหารยาว
- ขั้นที่ 3 ยกจำนวนชุดต่อไปลงมาเป็นตัวตั้งชุดใหม่ต่อไป ถ้าตัวตั้งหมดหรือตัวตั้งถึงจุดทศนิยมให้ใส่จุดทศนิยมที่ผลลัพธ์แล้วเติม 0 ที่ตัวตั้งชุดละ 2 ตัว หรือยกเลขหลังจุดทศนิยมคู่ต่อไปลงมา
- ขั้นที่ 4 นำ 2 ไปคูณกับผลลัพธ์ แล้วนำผลมาใส่ไว้เป็นตัวหารตัวใหม่ จากนั้นหาจำนวนที่เหมือนกันมาเติมใส่ที่ผลลัพธ์ และตัวหารตัวหลังสุด แล้วดำเนินการตามวิธีหารยาวต่อไป
- ขั้นที่ 5 ดำเนินตามหลักการขั้นที่ 3 และขั้นที่ 4 ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้จำนวนตามต้องการ

ตัวอย่างวิธีหารยาว จงหารากที่สองที่เป็นบวกของ 31,275.9225 ให้คำตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

| | | | | | |
|-----------------------------|-----|----------------------|---|--|--|
| | | ① 76.85 | | | |
| 1×2 | 1 | 3, 12, 75.92, 25, 00 | ผลลัพธ์ที่ได้เติมหลังตัวหารทำให้เกิดผลลัพธ์ใหม่ | | |
| | | 1 | $1 \times \textcircled{1} \leftarrow$ ผลลัพธ์ | | |
| | ② 7 | 212 | $27 \times \textcircled{7}$ | | |
| | | 189 | | | |
| $17 \times 2 \rightarrow$ | ③ 6 | 2375 | $346 \times \textcircled{6}$ | | |
| | | 2076 | | | |
| $176 \times 2 \rightarrow$ | ④ 8 | 29992 | $3528 \times \textcircled{8}$ | | |
| | | 28224 | | | |
| $1768 \times 2 \rightarrow$ | ⑤ 5 | 176825 | $35365 \times \textcircled{5}$ | | |
| | | 176825 | | | |
| | | 0 | | | |

ดังนั้น $\sqrt{31,275.9225} = 176.85$

ตอบ

6. รากที่สาม (Cuberoot)

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ รากที่สามของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ a

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

สัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$ อ่านว่า รากที่สามของ a

จากบทนิยามจะได้ $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

การหารากที่สามในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีหา 2 แบบ คือ

1. การหารากที่สามโดยการแยกตัวแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่ารากที่สามของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) 2,744 **วิธีทำ** เนื่องจาก $(14)^3 = 2,744$

ดังนั้น รากที่สามของ 2,744 คือ 14

นั่นคือ $\sqrt[3]{14^3} = 14$

(2.) -9,261 **วิธีทำ** เนื่องจาก $(-21)^3 = -9,261$

ดังนั้น รากที่สามของ -9,261 คือ -21

นั่นคือ $\sqrt[3]{(-21)^3} = -21$

ข้อสังเกต

1. รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ มีรากเดียวเท่านั้น
2. จำนวนจริงลบเมื่อยกกำลังสามไม่เท่ากับจำนวนบวก แต่เป็นจำนวนลบเช่นเดิม
3. รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะอย่างไรอย่างหนึ่งเท่านั้น

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก a เป็นรากที่สามของ a^3 และ $\sqrt[3]{a^3}$ เป็นรากที่สามของ a^3

ดังนั้น $\sqrt[3]{a^3} = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) $\sqrt[3]{-(a^3 b^6 c^9)}$ = $\sqrt[3]{(-ab^2 c^3)^3}$ = $-ab^2 c^3$

(2.) $\sqrt{169} + \sqrt[3]{343}$ = $\sqrt{(13)^2} + \sqrt[3]{7^3}$ = $13 + 7$ = 20

(3.) $\sqrt{81} \times \frac{\sqrt[3]{1.331}}{\sqrt[3]{-512}}$ = $\sqrt{9^2} \times \frac{\sqrt[3]{(1.1)^3}}{\sqrt[3]{(-8)^3}}$ = $9 \times \frac{1.1}{(-8)}$ = -1.2375

ตอบ

2. การหารากที่สามจากตาราง เช่นเดียวกับการหารากที่สอง สามารถดูตารางเพื่อหาค่ารากที่สามได้ในหนังสือเรียน

ตัวอย่างที่ 15 จงหารากที่สามของจำนวนที่กำหนดให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สามโดยใช้ตาราง

(1.) 43

วิธีทำ รากที่สามของ 43 คือ $\sqrt[3]{43}$

ใช้ตารางดูค่า $n = 43$ แล้วไปดูตารางช่อง $\sqrt[3]{n}$ ในบรรทัดเดียวกัน

นั่นคือ $\sqrt[3]{43} = 3.503$

(2.) -65

วิธีทำ รากที่สามของ -65 คือ $\sqrt[3]{-65}$

นั่นคือ $\sqrt[3]{-65} = -4.021$

ตอบ

7. รากที่ n

บทนิยาม

เมื่อ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ รากที่ n ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลัง n แล้วได้ a

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

สมบัติของรากที่ n เมื่อ $a \geq 0, b \geq 0$

$$1. \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$2. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$3. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

ตัวอย่างที่ 16 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$(1.) \sqrt[9]{-\left(\frac{512x^{18}y^{36}}{z^9}\right)} = \sqrt[9]{(-1)^9 \frac{[2^9 \cdot (x^2)^9 \cdot (y^4)^9]}{z^9}}$$

$$= (-1) \cdot (2) \cdot \frac{x^2 \cdot y^4}{z}$$

$$= -2 \frac{x^2 y^4}{z}$$

$$(2.) \sqrt[7]{2,187x^{14} \cdot y^{21}}$$

$$= \sqrt[7]{3^7 \cdot (x^2)^7 \cdot (y^3)^7}$$

$$= 3x^2 y^3$$

$$(3.) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} + \frac{\sqrt[5]{7^3} \times \sqrt[5]{7^7}}{(\sqrt[5]{7})^5}$$

$$= 3 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 7}$$

$$= 3 + \frac{10}{7}$$

$$= 3 + \frac{7^2}{7}$$

$$= 10$$

ตอบ