บทที่ 5 จำนวนจริง

1. จำนวนจริง (Real Number)

จำนวนจริงประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ แสดงได้ด้วยโครงสร้างของระบบจำนวนจริง (The Real Number System) ดังนี้

- จำนวนจริง
  - จำนวนตรรกยะ
    - จำนวนเต็ม
      - จำนวนเต็มลบ
      - จำนวนเต็มศูนย์
      - จำนวนเต็มบวก
    - เศษส่วน
    - ทศนิยม
  - จำนวนอตรรกยะ

2. จำนวนตรรกยะ (Rational Number)

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ หรืออยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ

เช่น จำนวนเต็ม $-3,\ 2,\ 5,\ 8$

เศษส่วน $-\frac{9}{5},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{8}{13}$

ทศนิยม $-0.27,\ 7.403,\ 3.7\dot{6}$ เป็นต้น

การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม โดยทั่วไปใช้วิธีการนำส่วนไปหารเศษ โดยการหารยาวแบบธรรมดา

ตัวอย่าง จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปทศนิยม

(1.) $\frac{5}{8}$ (2.) $\frac{13}{16}$ (3.) $\frac{2}{3}$

วิธีทำ

(1.)
```
   0.625
8)50_
  48
   20_
   16
    40_
    40
     0
```

(2.)
```
    0.8125
16)130_
   128
     20_
     16
      40_
      32
       80_
       80
        0
```

(3.)
```
   0.66...
3)20_
  18
   20
   18
    20
    18
     2
```

เว็บไซต์นายร้อยไทย www.thaicadet.org

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่ามีทศนิยมอยู่ 2 แบบ คือ

1. **ทศนิยมรู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนรู้จบ หรือมีศูนย์ซ้ำ เช่น $0.625\dot{0}$, $0.8125\dot{0}$, 0.3, 3.735 เป็นต้น

2. **ทศนิยมไม่รู้จบ** ได้แก่ ทศนิยมที่จำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นจำนวนไม่รู้จบ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

2.1 ทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ ได้แก่ ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมตัวหนึ่งหรือมากกว่าซ้ำกันอย่างเป็นระบบ เช่น

$-2.3666... = -2.3\dot{6}$

$0.757575... = 0.\dot{7}\dot{5}$

$3.235353535... = 3.2\dot{3}\dot{5}$ เป็นต้น

2.2 ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ ได้แก่ ทศนิยมที่มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมมากมายแบบไม่เป็นระบบ และไม่ซ้ำกันเลย เช่น 1.4142135..., 2.3764853287... เป็นต้น

(* ทศนิยมแบบนี้อยู่ในเซตของจำนวนอตรรกยะนั่นเอง)

<u>**การเขียนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน**</u> ต้องเป็นทศนิยมรู้จบ และทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำกันเท่านั้น

1. การเขียนทศนิยมรู้จบ (ทศนิยมซ้ำศูนย์) ให้เป็นเศษส่วนนั้น ทำได้โดยการทำส่วนให้เป็นเลขพหุคูณของ 10 ขึ้นอยู่กับว่าจำนวนนั้นมีทศนิยมกี่ตำแหน่ง เช่น

$$0.4 = \frac{4}{10}$$

$$2.37 = \frac{237}{100}$$

$$0.067 = \frac{67}{1,000}$$

2. การเขียนทศนิยมแบบซ้ำให้เป็นเศษส่วน ทำได้ดังวิธีต่อไปนี้

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

(1.) $0.\dot{7}$ **วิธีทำ** ให้ $N = 0.\dot{7}$

$= 0.777...$ **(1)**

คูณสมการที่ **(1)** ด้วย 10 จะได้

$10N = 7.777...$ **(2)**

(2)–(1) ; $10N - N = 7.777... - 0.777...$

$9N = 7$

$\therefore N = \frac{7}{9}$

ดังนั้น $0.\dot{7}$ จึงมีค่าเท่ากับ $\frac{7}{9}$ **ตอบ**

www.thaicadet.org

(2.) $1.\dot{2}\dot{3}$ **วิธีทำ** ให้ $\mathbf{N} = 1.\dot{2}\dot{3}$

$= 0.1232323\ldots \qquad \textbf{(1)}$

คูณสมการที่ **(1)** ด้วย 100 จะได้

$100N = 123.232323\ldots \qquad \textbf{(2)}$

(2)–(1) ; $100N - N = 123.23\ldots - 1.23\ldots$

$99N = 122$

$\therefore N = \dfrac{122}{99}$

ดังนั้น $1.\dot{2}\dot{3}$ จึงมีค่าเท่ากับ $\dfrac{122}{99}$ **ตอบ**

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า การเขียนทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำให้เป็นเศษส่วนนั้น สามารถทำได้ด้วยวิธีลัด โดยใช้หลักการดังนี้

$$\frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}} = \frac{\text{เลขทั้งหมด} - \text{เลขตัวที่รู้จบ}}{\text{(แล 9 ซึ่งมีจำนวนเท่ากับทศนิยมไม่รู้จบ)}}$$

สำหรับทศนิยมไม่รู้จบล้วน ๆ จากหลักการดังกล่าว สามารถสรุปง่าย ๆ โดยให้เขียนจำนวนที่เป็นเลขหลังจุดทศนิยมเป็นเศษแล้วส่วนเป็น 9 ซึ่งจำนวนของเลข 9 ที่เป็นส่วน จะเท่ากับจำนวนตัวเลขที่อยู่หลังจุดนั้น

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

(1.) $0.\dot{5}\dot{7} = \dfrac{57}{99}$

(2.) $13.\dot{2}6\dot{8} = 13\dfrac{268}{999}$

(3.) $3.\dot{8}60\dot{9} = 3\dfrac{8609}{9999}$ **ตอบ**

* จะสามารถทำตัวอย่างต่อไปนี้ได้อย่างง่าย ๆ ดังนี้

$0.\dot{9} = \dfrac{9}{9} = 1$

$6.\dot{9}\dot{9} = 6\dfrac{99}{99} = 7$

$2.\dot{9}9\dot{9} = 2\dfrac{999}{999} = 3$

จะเห็นว่า ถ้าส่วนทศนิยมเป็นรูปแบบของ $0.\dot{9}$, $0.\dot{9}\dot{9}$, $0.\dot{9}9\dot{9}$
ค่าของจำนวนจะถูกปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็มบวกตัวแรก คือ เลข 1

www.thaicadet.org

ทศนิยมไม่รู้จบแบบผสม คือ ทศนิยมที่มีทั้งแบบรู้จบ และไม่รู้จบอยู่ในจำนวนเดียวกัน จากหลักการสามารถสรุปง่าย ๆ โดยการนำตัวเลขหลังจุดทศนิยมทั้งหมดตั้ง ลบด้วยตัวเลขที่เป็นทศนิยมรู้จบ แล้วหารด้วย 9 ซึ่งมีจำนวนเท่ากับตัวเลขที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ แล้วเติมศูนย์หลังเลข 9 ตามจำนวนทศนิยมที่รู้จบ

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนทศนิยมซ้ำต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

(1.) $0.2\dot{5} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$

(2.) $1.27\dot{4} = 1\frac{274-27}{900} = 1\frac{247}{900}$

(3.) $14.2\dot{3}\dot{5} = 14\frac{235-2}{990} = 14\frac{233}{990}$ **ตอบ**

<u>3. จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)</u>

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ หรือ **ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำได้** แต่สามารถหาค่าประมาณในรูปของทศนิยมซ้ำ หรือเศษส่วนได้

ตัวอย่างเช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $3\sqrt{13}$, π, 0.676776777... เป็นต้น

พิจารณาจำนวน

$\sqrt{2}$ = 1.4142135...

$\sqrt{3}$ = 1.7320508...

$\sqrt{5}$ = 2.2360679...

π = 3.14159265...

จะเห็นได้ว่า เลขทุกจำนวนเป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ หมายถึง ไม่สามารถหาค่าที่แท้จริงได้นั่นเอง

ดังนั้น ในการคำนวณทศนิยมใช้จำนวนตรรกยะเป็นค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะ เช่น

$\frac{22}{7}$ หรือ 3.142 เป็นค่าประมาณของ π

1.414 เป็นค่าประมาณของ $\sqrt{2}$

1.732 เป็นค่าประมาณของ $\sqrt{3}$

เนื่องจากจำนวนตรรกยะทุกจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน สำหรับจำนวนอตรรกยะก็สามารถแทนได้โดยจุดบนเส้นจำนวนเช่นเดียว

การหาจุดที่แทนที่ π บนเส้นจำนวน

$$\because \pi = \frac{\text{ความยาวรอบรูปวงกลม}}{\text{ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง}}$$

เว็บไซต์นายร้อยไทย www.thaicadet.org

เนื่องจากวงกลมทุกวงจะมีรูปแบบอัตราส่วนข้างต้นนี้เหมือนกันหมด แต่เศษส่วนข้างต้นจะไม่สามารถเขียนเป็นจำนวนตรรกยะได้ จึงมีการหาอัตราส่วนต่ำสุดที่เป็นรูปการหารของเลขจำนวนเต็มทั้งเศษและส่วน และพบว่าถ้ากำหนดความยาวรอบรูปวงกลมเป็น 22 หน่วย จะทำให้ได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 7 หน่วยพอดี (ซึ่งถ้าความยาวรอบรูปวงกลมเป็นเลขจำนวนเต็มตัวอื่น ก็จะไม่ได้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นจำนวนเต็ม) ทำให้ $\frac{22}{7}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำของค่า π โดยเราใช้ π เพื่อหาค่าต่อไปนี้

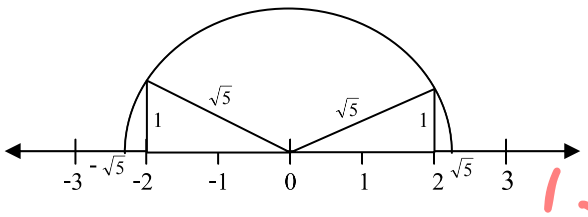
ความยาวรอบรูปวงกลม $= 2\pi r$

พื้นที่วงกลม $= \pi r^2$

พื้นที่ผิวทรงกลม $= 4\pi r^2$

ปริมาตรทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^2$ เป็นต้น

การหาจุดบนเส้นจำนวนที่แทน $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ ใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสช่วยหาจุดบนเส้นจำนวน ดังนี้



จากสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 2 หน่วย และ 1 หน่วย ให้หาด้านตรงข้ามมุมฉาก (แทนค่าด้วย x)

จะได้ $x^2 = 1^2 + 2^2$

$= 1 + 4 = 5$

ดังนั้น $x = \pm\sqrt{5}$ นั่นเอง

นั่นคือ จำนวนอตรรกยะทุกจำนวนแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนได้ เช่นเดียวกับจำนวนตรรกยะ จึงเรียกเส้นจำนวนนั้นว่า "เส้นจำนวนจริง"

4. สมบัติของจำนวนจริง

สมบัติการบวกของจำนวนจริง ให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

1. $a + b$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิด)
2. $a + b = b + a$ (สมบัติการสลับที่)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $a + 0 = a = 0 + a$ นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก
5. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ นั่นคือ $-a$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ a

สมบัติการคูณของจำนวนจริง ให้ a, b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

1. $a \times b$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิด)
2. $a \times b = b \times a$ (สมบัติการสลับที่)
3. $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $a\times 1 = a = 1\times a$ นั่นคือ 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ
5. $a\times\frac{1}{a} = 1$ เมื่อ $a \neq 0$ นั่นคือ a หรือ $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณซึ่งกันและกัน
6. $a\times(b + c) = (a\times b) + (a\times c)$ หรือ $(b + c)\times a = (b\times a) + (c\times a)$ (สมบัติการแจกแจงบนการบวก)

เว็บไซต์น่าร้องไทย www.thaicadet.org

5. รากที่สอง (Square Root)

บทนิยาม
ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

ข้อสังเกต
1. ถ้า a = 0 รากที่สองของ a คือ 0
2. รากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่เป็นจำนวนตรรกยะไม่นิยมเขียนรากที่สองของจำนวนนั้นในรูปที่ใช้เครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เช่น เขียน 15 แทน $\sqrt{225}$ และเขียน -15 แทน $-\sqrt{225}$ เป็นต้น
3. รากที่สองของจำนวนจริงบวก จะเป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4

1.) รากที่สองของ 25 คือ $\sqrt{25}$ และ $-\sqrt{25}$
ดังนั้น $\sqrt{25} = 5$ และ $-\sqrt{25} = -5$
นั่นคือ รากที่สองของ 25 คือ ± 5

2.) รากที่สองของ 0.36 คือ $\sqrt{0.36}$ และ $-\sqrt{0.36}$
ดังนั้น $\sqrt{0.36} = 0.6$ และ $-\sqrt{0.36} = -0.6$
นั่นคือ รากที่สองของ 0.36 คือ ± 0.6

3.) รากที่สองของ 23 คือ $\sqrt{23}$ และ $-\sqrt{23}$
เนื่องจากไม่สามารถหาจำนวนเต็ม หรือเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำที่นำมายกกำลังสองแล้วได้ 23
ทำให้ $\sqrt{23}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ **ตอบ**

บทนิยาม
ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $\sqrt{a^2} = |a|$ เมื่อ $|a|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ a

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

(1.) $-\sqrt{324} = -\sqrt{18^2} = -18$

* (2.) $\sqrt{(-14)^2} = |-14| = 14$

** (3.) $-\sqrt{c^2d^4} = -\sqrt{\left(cd^2\right)^2} = -\left|cd^2\right|$ **ตอบ**

ข้อสังเกต ในรากคู่ใด ๆ แล้ว (เช่นในกรณีรากที่ 2, 4, 6, ...) จำนวนในรากนั้น ๆ ต้องไม่ติดลบ

ดังนั้น *(ข้อ 2) $\sqrt{(-14)^2}$ จะไม่ตอบ -14 และเราสามารถแก้โจทย์นี้อย่างละเอียดได้ดังนี้

$\sqrt{(-14)^2} = \sqrt{[(-1)(14)]^2} = \sqrt{(-1)^2 \cdot (14)^2} = \sqrt{1(14)^2} = 14$ ซึ่งค่าเป็นบวกไม่ติดลบ

**(ข้อ 3) $-\sqrt{c^2d^4} = -\left|cd^2\right|$ เพราะถ้าจำนวนที่อยู่ภายใต้รากที่สองเป็นตัวแปร

จะไม่ถอดออกมานอก $|\ |$ (นอกค่าสัมบูรณ์)

เว็บไซต์นักเรียนไทย www.thaicadet.org

ตัวอย่างที่ 6 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 45 **วิธีทำ** รากที่สองของ 45 คือ $\sqrt{45}$ และ $-\sqrt{45}$

นั่นคือ $\sqrt{45} = \sqrt{3\times3\times5} = |3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$

$-\sqrt{45} = -\sqrt{3\times3\times5} = -|3\sqrt{5}| = -3\sqrt{5}$

ดังนั้น รากที่สองของ 45 คือ $3\sqrt{5}$ และ $-3\sqrt{5}$

(2.) 0.0049 **วิธีทำ** รากที่สองของ 0.0049 คือ $\sqrt{0.0049}$ และ $-\sqrt{0.0049}$

นั่นคือ $\sqrt{0.0049} = \sqrt{(0.07)^2} = |0.07| = 0.07$

$-\sqrt{0.0049} = -\sqrt{(0.07)^2} = -|0.07| = -0.07$

ดังนั้น รากที่สองของ 0.0049 คือ 0.07 และ –0.07 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 7 จงหารากที่สองที่เป็นบวกของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 1,024 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นบวกของ 1,024 คือ $\sqrt{1,024}$

นั่นคือ $\sqrt{1,024} = \sqrt{(32)^2} = |32| = 32$

ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 1,024 คือ 32

(2.) 0.0169 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นบวกของ 0.0169 คือ $\sqrt{0.0169}$

นั่นคือ $\sqrt{0.0169} = \sqrt{(0.13)^2} = |0.13| = 0.13$

ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 0.019 คือ 0.13 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8 จงหารากที่สองที่เป็นลบของจำนวนต่อไปนี้

(1.) 2,209 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นลบของ 2,209 คือ $-\sqrt{2,209}$

นั่นคือ $-\sqrt{2,209} = -\sqrt{(47)^2} = -|47| = -47$

ดังนั้น รากที่สองที่เป็นบวกของ 2,209 คือ -47

(2.) 0.0729 **วิธีทำ** รากที่สองที่เป็นลบของ 0.0729 คือ $-\sqrt{0.0729}$

นั่นคือ $-\sqrt{0.0729} = -\sqrt{(0.27)^2} = -|0.27| = -0.27$

ดังนั้น รากที่สองที่เป็นลบของ 0.0729 คือ –0.27 **ตอบ**

ข้อสังเกต

1. คำว่ารากที่สองของจำนวนใด ๆ จะมีค่า 2 ค่า คือ ค่าเป็นบวกและค่าเป็นลบ ส่วนรากที่สองที่เป็นบวกมีค่าเดียว เช่นเดียวกับรากที่สองที่เป็นลบก็มีค่าเดียว
2. รากที่สองของ 15 $\neq \sqrt{15}$ แต่รากที่สองที่เป็นบวกของ 15 = $\sqrt{15}$ นั่นคือรากที่สองของ 15 = $\pm\sqrt{15}$

สมบัติของ $\sqrt{a}$ เมื่อ $a \geq 0$

1. ถ้า $a \geq 0,\ b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. ถ้า $a \geq 0,\ b \geq 0$ แล้ว $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

เว็บไซต์ห้องเรียนไทย www.thaicadet.org

การแก้ปัญหาโจทย์ลักษณะนี้ ให้พิจารณาเรื่องตัวประกอบเป็นสำคัญ หากแยกตัวประกอบได้คล่องก็จะแก้ปัญหาโจทย์ได้อย่างรวดเร็ว

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาผลลัพธ์ของจำนวนต่อไปนี้

(1.) $\sqrt{8}+2\sqrt{3}$
$$= \sqrt{2\times2\times2}+2\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$
$$= 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

(2.) $\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)$
$$= \left(\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}\right)(1)$$
$$= 3\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}$$
$$= 3(3)-\sqrt{3}$$
$$= 9-\sqrt{3}$$

(3.) $2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)$
$$= \left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}\right)-\left(2\sqrt{3}\right)(1)$$
$$= (2)(3)\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}$$
$$= (2)(3)(3)-2\sqrt{3}$$
$$= 2\left(9-\sqrt{3}\right)$$

(4.) $\dfrac{2\sqrt{7}-\sqrt{24}}{2}$
$$= \frac{2\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{24}}{2}$$
$$= \sqrt{7}-\frac{\sqrt{2\times2\times2\times3}}{2}$$
$$= \sqrt{7}-\frac{2\sqrt{6}}{2}$$
$$= \sqrt{7}-\sqrt{6}$$

(5.) $\dfrac{-3\pi}{4}$ เมื่อ $\pi \approx 3.14$
$$= \frac{(-3)(3.14)}{4}$$
$$= 2.355$$

(6.) $\sqrt{\dfrac{729}{2,025}}$
$$= \sqrt{\frac{(27)^2}{(45)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(27)^2}}{\sqrt{(45)^2}}$$
$$= \frac{27}{45}$$
$$= 0.6$$

ตอบ

เว็บไซต์นายร้อยไทย www.thaicadet.org

การหารากที่สองของจำนวนใด ๆ มีวิธีทั้งหมด 4 แบบ ดังนี้

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหารากที่สองของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) 4,096

วิธีทำ รากที่สองของ 4,096

$$= \pm\sqrt{4{,}096}$$
$$= \pm\sqrt{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}$$
$$= \pm\sqrt{2^{12}}$$
$$= \pm\sqrt{(2^6)^2}$$
$$= \pm 2^6$$
$$= \pm 64$$

(2.) 11,025

วิธีทำ รากที่สองของ 11,025

$$= \pm\sqrt{11{,}025}$$
$$= \pm\sqrt{3\times3\times5\times5\times7\times7}$$
$$= \pm\sqrt{(3\times5\times7)^2}$$
$$= \pm(3\times5\times7)$$
$$= \pm 105$$

ตอบ

2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{19}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

วิธีทำ <u>ขั้นที่ 1</u> หาจำนวนเต็มบวกสองจำนวนเรียงกัน ที่กำลังสองของจำนวนเต็มทั้งคู่มากกว่า และน้อยกว่ากำลังสองของ $\sqrt{19}$ → จำนวนเต็มบวกสองจำนวนนั้นคือ 4 และ 5

ดังนั้น $4^2 < (\sqrt{19})^2 < 5^2$

นั่นคือ $4 < \sqrt{19} < 5$

<u>ขั้นที่ 2</u> นำจำนวนเต็มทั้งสองที่หาได้ในขั้นที่ 1 มาหาค่าเฉลี่ย → เฉลี่ย 4 และ 5 จะได้ $\frac{4+5}{2} = 4.5$

<u>ขั้นที่ 3</u> นำค่าเฉลี่ยจากขั้นที่ 2 ไปหาร 19 แล้ว นำมาเปรียบเทียบค่า → นำค่าเฉลี่ย 4.5 ไปหาร 19 จะได้ $\frac{19}{4.5} \approx 4.22$

จะได้ $4.22 \times 4.22 < 19 < 4.5 \times 4.5$

นั่นคือ $(4.22)^2 < \sqrt{19} < (4.5)^2$

$\therefore 4.22 < \sqrt{19} < 4.5$

<u>ขั้นที่ 4</u> หาค่าเฉลี่ยทั้งสองจำนวนที่หาได้จาก ขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 อีกครั้ง แล้วนำค่าเฉลี่ยที่ได้ไปหาร 19 นำมาเปรียบเทียบค่าเช่นเดียวกับขั้นที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง → เฉลี่ย 4.22 และ 4.5 จะได้ $\frac{4.22+4.5}{2} = 4.36$

นำค่าเฉลี่ย 4.36 ไปหาร 19 จะได้ $\frac{19}{4.36} \approx 4.358$

จะได้ $4.358 \times 4.358 < 19 < 4.36 \times 4.36$

นั่นคือ $(4.358)^2 < (\sqrt{19})^2 < (4.36)^2$

เนื่องจาก $4.358 \approx 4.36$ ดังนั้น ค่าประมาณของ $\sqrt{19}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง คือ 4.36 **ตอบ**

เว็บไซต์นายร้อยไทย www.thaicadet.org

3. การหารากที่สองจากตาราง (ดูตารางได้จากหนังสือเรียนของตัวเองครับ)

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> จงหาค่ารากที่สองที่เป็นบวกของ 33 ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สามโดยใช้ตาราง

วิธีทำ <u>ขั้นที่ 1</u> ดูค่า n ในตารางที่ตรงกับ 33

<u>ขั้นที่ 2</u> ดูค่าของ $\sqrt{n}$ ในตารางที่ตรงกับ 33

นั่นคือ $n = 33$

$\sqrt{n} = 5.745$

หมายความว่า $\sqrt{33}$ มีค่าเท่ากับ 5.745

ดังนั้น $\sqrt{33} = 5.745$ **ตอบ**

4. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร มีหลักการทำดังนี้

ขั้นที่ 1 นำจำนวนที่ต้องการหารากที่สองมาแบ่งออกเป็นชุด ชุดละ 2 ตัว โดยจำนวนเต็มเริ่มนับจากหลักหน่วยไปทางซ้าย ส่วนทศนิยมเริ่มนับจากตำแหน่งที่ 1 ไปทางขวา เช่น แบ่งเลข 23071.465 ได้เป็น 2, 30, 71.46, 5

ขั้นที่ 2 นำจำนวนที่ต้องการหารากที่สองมาตั้งหารยาว หาจำนวน 2 จำนวนที่เท่ากันมาคูณกัน ได้ผลลัพธ์เท่ากับจำนวนชุดแรก หรือน้อยกว่าแต่เกือบเท่ากัน แล้วใส่เป็นตัวหารและผลลัพธ์ดำเนินตามวิธีการหารยาว

ขั้นที่ 3 ยกจำนวนชุดต่อไปลงมาเป็นตัวตั้งชุดใหม่ต่อไป ถ้าตัวตั้งหมดหรือตัวตั้งถึงจุดทศนิยมให้ใส่จุดทศนิยมที่ผลลัพธ์ แล้วเติม 0 ที่ตัวตั้งชุดละ 2 ตัว หรือยกเลขหลังจุดทศนิยมคู่ต่อไปลงมา

ขั้นที่ 4 นำ 2 ไปคูณกับผลลัพธ์ แล้วนำผลมาใส่ไว้เป็นตัวหารตัวใหม่ จากนั้นหาจำนวนที่เหมือนกันมาเติมใส่ที่ผลลัพธ์และตัวหารตัวหลังสุด แล้วดำเนินการตามวิธีหารยาวต่อไป

ขั้นที่ 5 ดำเนินตามหลักการขั้นที่ 3 และขั้นที่ 4 ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้จำนวนตามต้องการ

<u>ตัวอย่างวิธีหารยาว</u> จงหารากที่สองที่เป็นบวกของ 31,275.9225 ให้คำตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง

		① 76 . 85	
	1	3 , 12 , 75 . 92 , 25 , 00	ผลลัพธ์ที่ได้เติมหลังตัวหารทำให้เกิดผลลัพธ์ใหม่
1 × 2		1	1 × ① <-- ผลลัพธ์
	② 7	2 1 2	
		1 8 9	27 × ⑦
17 × 2 →	34 6	2 3 7 5	
		2 0 7 6	346 × ⑥
176 × 2 →	352 8	2 9 9 9 2	
		2 8 2 2 4	3528 × ⑧
1768 × 2 →	3536 5	1 7 6 8 2 5	
		1 7 6 8 2 5	35365 × ⑤
		0	

ดังนั้น $\sqrt{31,275.9225} = 176.85$ **ตอบ**

www.thaicadet.org

6. รากที่สาม (Cuberoot)

บทนิยาม
ให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ รากที่สามของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ a
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$
สัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$ อ่านว่า รากที่สามของ a
จากบทนิยามจะได้ $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

การหารากที่สามในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีหา 2 แบบ คือ

1. การหารากที่สามโดยการแยกตัวแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่ารากที่สามของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) 2,744 **วิธีทำ** เนื่องจาก $(14)^3 = 2{,}744$
ดังนั้น รากที่สามของ 2,744 คือ 14
นั่นคือ $\sqrt[3]{14^3} = 14$

(2.) -9,261 **วิธีทำ** เนื่องจาก $(-21)^3 = -9{,}261$
ดังนั้น รากที่สามของ -9,261 คือ –21
นั่นคือ $\sqrt[3]{(-21)^3} = -21$

ข้อสังเกต
1. รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ มีรากเดียวเท่านั้น
2. จำนวนจริงลบเมื่อยกกำลังสามไม่เท่ากับจำนวนบวก แต่เป็นจำนวนลบเช่นเดิม
3. รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก a เป็นรากที่สามของ a^3 และ $\sqrt[3]{a^3}$ เป็นรากที่สามของ a^3
ดังนั้น $\sqrt[3]{a^3} = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1.) $\sqrt[3]{-(a^3b^6c^9)} = \sqrt[3]{(-ab^2c^3)^3} = -ab^2c^3$

(2.) $\sqrt{169} + \sqrt[3]{343} = \sqrt{(13)^2} + \sqrt[3]{7^3} = 13 + 7 = 20$

(3.) $\sqrt{81} \times \dfrac{\sqrt[3]{1.331}}{\sqrt[3]{-512}} = \sqrt{9^2} \times \dfrac{\sqrt[3]{(1.1)^3}}{\sqrt[3]{(-8)^3}} = 9 \times \dfrac{1.1}{(-8)} = -1.2375$ **ตอบ**

เว็บไซต์หาร้องไทย www.thaicadet.org

2. การหารากที่สามจากตาราง เช่นเดียวกับการหารากที่สอง สามารถดูตารางเพื่อหาค่ารากที่สามได้ในหนังสือเรียน

ตัวอย่างที่ 15 จงหารากที่สามของจำนวนที่กำหนดให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สามโดยใช้ตาราง

(1.) 43 **วิธีทำ** รากที่สามของ 43 คือ $\sqrt[3]{43}$

ใช้ตารางดูค่า n $= 43$ แล้วไปดูตารางช่อง $\sqrt[3]{n}$ ในบรรทัดเดียวกัน

นั่นคือ $\sqrt[3]{43} = 3.503$

(2.) –65 **วิธีทำ** รากที่สามของ –65 คือ $\sqrt[3]{-65}$

นั่นคือ $\sqrt[3]{-65} = -4.021$ **ตอบ**

7. รากที่ n

บทนิยาม

เมื่อ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ รากที่ n ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลัง n แล้วได้ a

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

สมบัติของรากที่ n เมื่อ $a \geq 0,\ b \geq 0$

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$ 2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b}$ 3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ตัวอย่างที่ 16 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

(1.) $\sqrt[9]{-\left(\frac{512x^{18}y^{36}}{z^9}\right)} = \sqrt[9]{(-1)^9\frac{[2^9.(x^2)^9.(y^4)^9]}{z^9}}$

$= (-1)\ .\ (2)\ .\ \frac{x^2.y^4}{z}$

$= -2\frac{x^2y^4}{z}$

(2.) $\sqrt[7]{2{,}187x^{14}.y^{21}} = \sqrt[7]{3^7.(x^2)^7.(y^3)^7}$

$= 3x^2y^3$

(3.) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}+\frac{\sqrt[5]{7^3}\times\sqrt[5]{7^7}}{\left(\sqrt[5]{7}\right)^5} = 3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{3}}+\frac{7^{\frac{3}{5}}.7^{\frac{7}{5}}}{7^{\frac{5}{5}}}$

$= 3^{\frac{3}{3}}+\frac{7^{\frac{10}{5}}}{7}$

$= 3+\frac{7^2}{7}$

$= 10$ **ตอบ**

เว็ปไซต์นายร้อยไทย www.thaicadet.org