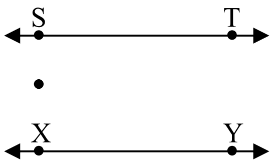
เส้นขนาน

1. เส้นขนานและมุมภายใน

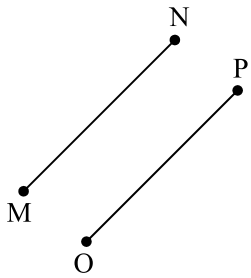
การขนานกันของเส้นตรงมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม	เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน

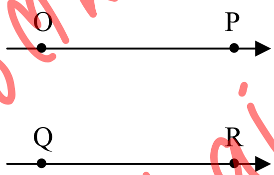


เมื่อ $\overleftrightarrow{ST}$ และ $\overleftrightarrow{XY}$ ขนานกัน อาจกล่าวว่า $\overleftrightarrow{ST}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{XY}$ หรือ $\overleftrightarrow{XY}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{ST}$
อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{ST}$ // $\overleftrightarrow{XY}$ หรือ $\overleftrightarrow{XY}$ // $\overleftrightarrow{ST}$

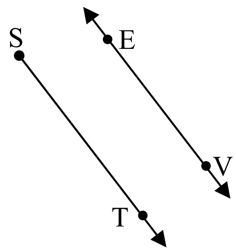
เราสามารถกล่าวว่า ส่วนของเส้นตรงหรือรังสีขนานกัน เมื่อส่วนของเส้นตรง หรือรังสีนั้นเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ขนานกัน เช่น



$\overline{MN} // \overline{OP}$

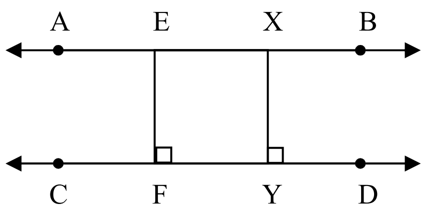


$\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{QR}$



$\overrightarrow{ST} // \overleftrightarrow{UV}$

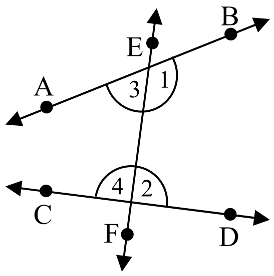
ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน



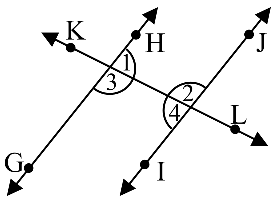
ในกรณีทั่วไป ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันแล้ว ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ และในทางกลับกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

พิจารณารูปต่อไปนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

$\overleftrightarrow{EF}$ ตัดเส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$

เรียกมุม 1 และ 2 ว่า มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด

และ เรียกมุม 3 และ 4 ว่า มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดเช่นกัน

และ สังเกตว่า $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ ว่า มีค่ามากกว่า 180°

$\hat{3}$ และ $\hat{4}$ ว่า มีค่าน้อยกว่า 180°

$\hat{1}$ และ $\hat{2}$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

$\hat{3}$ และ $\hat{4}$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเช่นกัน

จะสังเกตได้ว่า $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3} + \hat{4} = 180°$

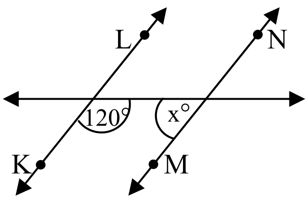
ทำให้ $\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{IJ}$

จึงสรุปเป็นบทนิยามได้ว่า

> เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{MN}$ จงหาค่า x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.)

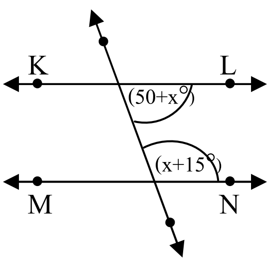


วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{MN}$ ทำให้ $120° + x = 180°$

ดังนั้น $x = 180° + 120° = 60°$

จะได้มุม x กาง 60 องศา **ตอบ**

2.)



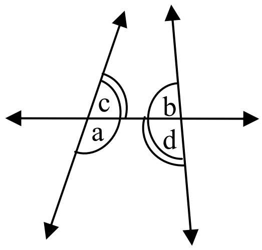
วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{KL} // \overleftrightarrow{MN}$ ทำให้

$$(50°+x) + (x+15°) = 180°$$
$$50 + x + x + 15 = 180$$
$$2x + 65 = 180$$
$$2x = 180 - 65 = 115$$
$$x = \frac{115}{2} = 57.5°$$

จะได้มุม x = 57.5° **ตอบ**

2. เส้นขนานและมุมแย้ง

พิจารณารูปต่อไปนี้

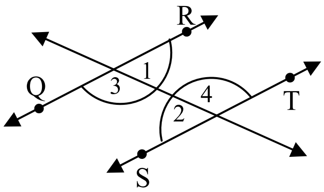


จากรูป เรียก $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ว่าเป็นมุมแย้ง

และ เรียก $\hat{c}$ และ $\hat{d}$ ว่าเป็นมุมแย้งเช่นกัน

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2

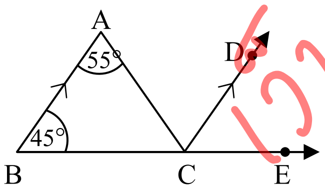


จากรูป $\hat{1} + \hat{3} = 180°$ และ $\hat{2} + \hat{4} = 180°$ } เพราะเป็นมุมที่ประกอบกันเป็นเส้นตรง

ถ้า $\overleftrightarrow{QR} \,//\, \overleftrightarrow{ST}$ แล้ว $\hat{1} = \hat{2}$ และแล้ว $\hat{3} = \hat{4}$ } เพราะเป็นมุมแย้ง

ตัวอย่างที่ 3

1.)



จากรูป จงหาขนาดของ $A\hat{C}D + D\hat{C}E$

วิธีทำ จากรูป $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{CD}$ ทำให้ $B\hat{A}C = A\hat{C}D$ เพราะเป็นมุมแย้งกัน

เมื่อ $B\hat{A}C = 55°$ แล้วทำให้ $A\hat{C}D = 55°$ เช่นกัน

จาก ΔABC ผลรวมของมุมภายในของ Δ ต้องเท่ากับ 180 องศา

ทำให้ $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180°$

$45° + B\hat{C}A + 55° = 180°$

ดังนั้น $B\hat{C}A = 180° - 45° - 55°$

$B\hat{C}A = 80°$

จาก $\overleftrightarrow{BE}$; $B\hat{C}A + A\hat{C}D + D\hat{C}E = 180°$

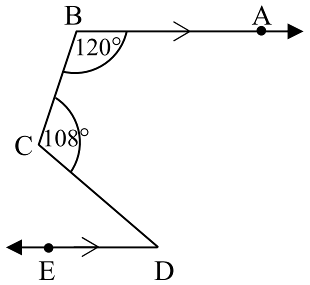
$80° + 55° + D\hat{C}E = 180°$

ดังนั้น $D\hat{C}E = 180° - 80° - 55°$

$D\hat{C}E = 45°$

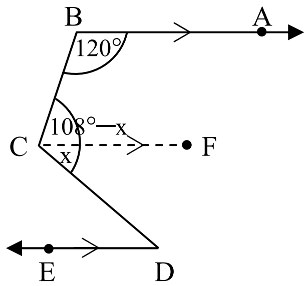
ทำให้ทราบว่าขนาดของ $A\hat{C}D + D\hat{C}E = 55° + 45° = 100°$ **ตอบ**

2.)



จากรูป จงหาขนาดของ $C\hat{D}E$

วิธีทำ เราสร้างเส้นสมมติที่ขนานกับ $\overrightarrow{BA}$ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด C ดังนี้



จากรูป จะได้ $A\hat{B}C$ และ $B\hat{C}F$ เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

เมื่อ $\overrightarrow{AB} \,//\, \overline{CF}$ จะได้ $120° + (108° - x)° = 180°$

$120° + 108° - x° = 180°$

ดังนั้น $x = 120° + 108° - 180°$

จะได้ $\hat{x}$ หรือ $F\hat{C}D = 48°$

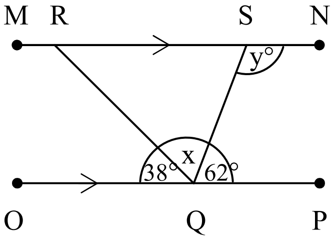
เนื่องจาก $\overline{CF} \,//\, \overrightarrow{DE}$ ทำให้ $F\hat{C}D = C\hat{D}E$

ดังนั้น $C\hat{D}E = F\hat{C}D = 48°$ **ตอบ**

การใช้มุมแย้งเพื่อยืนยันการขนานกันของเส้นตรงคู่ใด ๆ เป็นตามทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท	เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3.)



จากรูป จงหาขนาดของ $\hat{x} + \hat{y}$

วิธีทำ จาก $\overline{OP}$ จะได้ $38° + x° + 62° = 180°$

ทำให้ได้ $x° = 180° - 38° - 62°$

$= 80°$

จากรูป $\overline{MN} \,//\, \overline{OP}$ ทำให้ $y°$ และ $62°$ เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

จะได้ $y° + 62° = 180°$

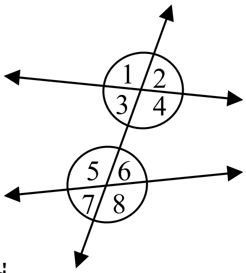
$y° = 180° - 62°$

$y° = 118°$

ดังนั้น $\hat{x} + \hat{y} = 80 + 118 = 198$ องศา **ตอบ**

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

พิจารณารูปต่อไปนี้



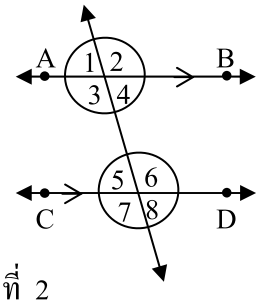
รูปที่ 1

จากรูป เรียก $\hat{1},\hat{2},\hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่ามุมภายนอก

และ เรียก $\hat{3},\hat{4},\hat{5}$ และ $\hat{6}$ ว่ามุมภายใน

ในทำนองเดียวกัน เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$, $\hat{2}$ และ $\hat{6}$ และมุมคู่อื่น ๆ

ในลักษณะนี้ว่า มุมภายนอกและมุมภายใน ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดด้วย



รูปที่ 2

จากรูป $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $\hat{1}=\hat{5}, \hat{2}=\hat{6}, \hat{3}=\hat{7}$ และ $\hat{4}=\hat{8}$

โดยแต่ละคู่เป็นมุมภายนอก ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดด้วย

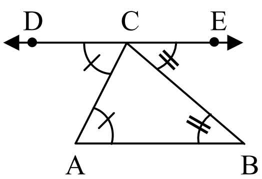
จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายในและมุมภายนอก ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน

ซึ่งจากทฤษฎีบทข้างต้น จะมีวิธีพิสูจน์มากมาย และมีทฤษฎีบทกลับด้วย แต่น้อง ๆ สามารถอ่านเพียงทฤษฎีบทข้างต้นให้เข้าใจ ก็สามารถแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับเส้นขนานได้แล้วครับ

4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

จากที่เราทราบมาแล้วว่า “ ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม รวมกันเท่ากับ 180° ”

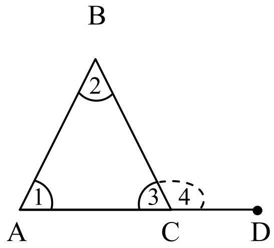


จากรูป $B\hat{A}C = A\hat{C}D$ และ $A\hat{B}C = B\hat{C}E$ $\Big\}$ เพราะเป็นมุมแย้ง

จะได้ $A\hat{C}D + A\hat{C}B + B\hat{C}E = 180^\circ$ เพราะมุมทั้งสามประกอบกันเป็น $\overline{DE}$

ทำให้เราได้ผลลัพธ์ได้ว่า $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^\circ$ เช่นกัน

มีอีกมุมหนึ่งที่น่าสนใจครับ



จากรูป $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3} = 180°$ (ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

จะได้ $\hat{3} = 180° - (\hat{1}+\hat{2})$ ---------- ①

และ $\hat{3}+\hat{4} = 180°$ เพราะทั้งสองมุมประกอบกันเป็นส่วนของเส้นตรง

จะได้ $\hat{3} = 180° - \hat{4}$ ---------- ②

เมื่อ ① = ② ; $180° - (\hat{1}+\hat{2}) = 180° - \hat{4}$

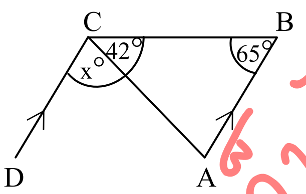
จะได้ $\hat{1}+\hat{2} = \hat{4}$

จากการพิสูจน์ต่าง ๆ ข้างต้นทำให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.)



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จงหาค่า x°

วิธีทำ จาก Δ ABC จะได้ $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$

$\hat{A}+65°+42° = 180°$

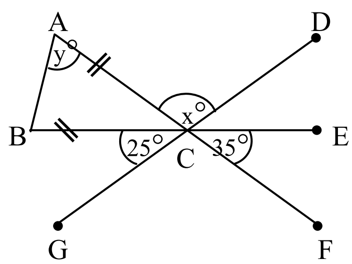
$\hat{A} = 180° - (65° + 42°)$

$= 73°$

โดยที่ $\hat{A}$ และ $\hat{x}$ เป็นมุมแย้ง

ดังนั้น $\hat{x} = \hat{A} = 73°$ **ตอบ**

2.)



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นฐานของ Δ หน้าจั่ว ABC จงหาค่าของ $\hat{x} - \hat{y}$

วิธีทำ จากรูป $A\hat{C}B = E\hat{C}F$

จะได้ $A\hat{C}B = 35°$

จาก $\overline{DG}$ จะได้ $\hat{x} + A\hat{C}B + 25° = 180°$

$\hat{x} + 35° + 25° = 180°$

$\hat{x} = 180° - (35° + 25°)$

$\hat{x} = 120°$

จาก Δ หน้าจั่ว ABC เมื่อ $A\hat{C}B$ เป็นมุมยอดมีขนาด 35°

ทำให้มุมที่ฐานของ Δ มีขนาดเท่ากัน

จะได้ $C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^\circ$ โดยที่ $C\hat{A}B = A\hat{B}C$

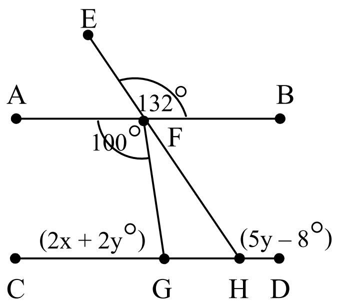
$$2\,C\hat{A}B + 35^\circ = 180^\circ$$

$$2\,C\hat{A}B = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$C\hat{A}B \text{ หรือ } \hat{y} = \frac{145^\circ}{2} = 72.5^\circ$$

ดังนั้น $\hat{x} - \hat{y} = 120^\circ - 72.5^\circ = 47.5^\circ$ **ตอบ**

3.)



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overline{CD}$ มี $C\hat{G}F = (2x + 2y)^\circ$ และ $D\hat{H}F = (5y - 8)^\circ$

จงหาค่าของ $x + 2y$

วิธีทำ พิจารณา $\overline{AB}$ จะได้ $A\hat{F}E + E\hat{F}B = 180^\circ$

$$A\hat{F}E + 132^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{F}E = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$$

$A\hat{F}E = B\hat{F}H$ ทำให้ $B\hat{F}H = 48^\circ$ เช่นกัน

จากเรื่องขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°

ทำให้ได้ $B\hat{F}H + F\hat{H}D = 180^\circ$

$$48^\circ + (5y - 8)^\circ = 180^\circ$$

$$5y - 8 = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

$$y = \frac{132^\circ + 8^\circ}{5}$$

$$= \frac{140}{5} = 28$$

และจากหลักการเดียวกัน ทำให้ได้ $A\hat{F}G + F\hat{G}C = 180^\circ$

$$100^\circ + (2x+2y) = 180^\circ$$

แทนค่า $y = 28$ ในสมการ ;

$$100 + (2x + 2\,(28)) = 180^\circ$$

$$100 + 2x + 56 = 180^\circ$$

$$2x = 180^\circ - (100 + 56)$$

$$2x = 24$$

$$2x = \frac{24}{2} = 12$$

ดังนั้น $x + 2y = 12 + 2\,(28) = 68$ **ตอบ**

★ ★ ★