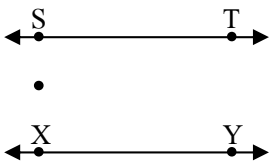


เส้นขนาน

1. เส้นขนานและมุมภายใน

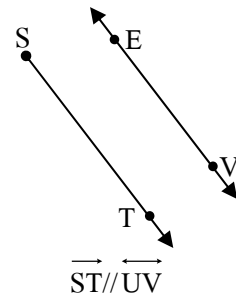
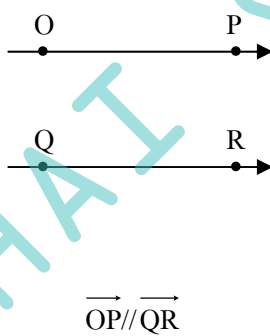
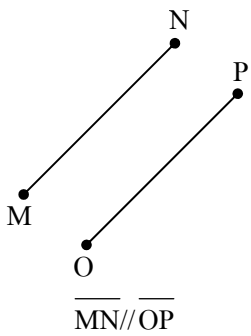
การขนานกันของเส้นตรงมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันก็ต่อเมื่อ
เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน

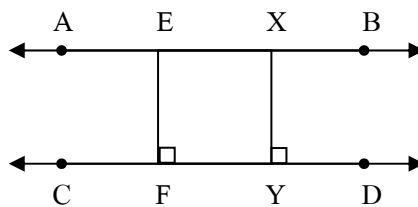


เมื่อ \vec{ST} และ \vec{XY} ขนานกัน อาจกล่าวว่า \vec{ST} ขนานกับ \vec{XY}
หรือ \vec{XY} ขนานกับ \vec{ST}
อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{ST} \parallel \vec{XY}$ หรือ $\vec{XY} \parallel \vec{ST}$

เราสามารถกล่าวว่า ส่วนของเส้นตรงหรือรังสีขนานกัน เมื่อส่วนของเส้นตรง หรือรังสีนั้นเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่ขนานกัน เช่น

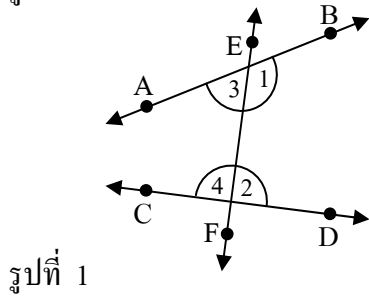


ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

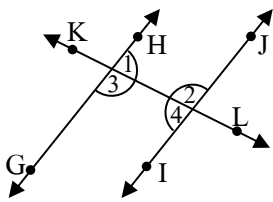


ในกรณีทั่วไป ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันแล้ว ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ และในทางกลับกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
พิจารณารูปต่อไปนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

\overleftrightarrow{EF} ตัดเส้นตรง \overleftrightarrow{AB} และ \overleftrightarrow{CD}

เรียกมุม 1 และ 2 ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

และ เรียกมุม 3 และ 4 ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเช่นกัน

และ สังเกตว่า 1 และ 2 ว่า มีค่ามากกว่า 180°

3 และ 4 ว่า มีค่าน้อยกว่า 180°

1 และ 2 เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

3 และ 4 เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเช่นกัน

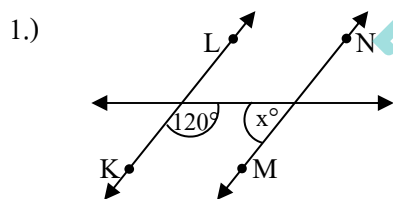
จะสังเกตได้ว่า $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$

ทำให้ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$

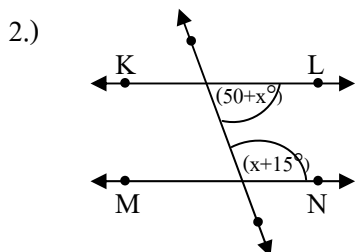
จึงสรุปเป็นบทนิยามได้ว่า

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ จงหาค่า x ในแต่ละข้อต่อไปนี้



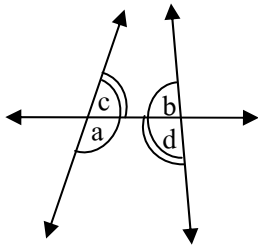
1.) **วิธีทำ** เนื่องจาก $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ทำให้ $120^\circ + x = 180^\circ$
 ดังนั้น $x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 จะได้มุม x กาง 60 องศา **ตอบ**



2.) **วิธีทำ** เนื่องจาก $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ทำให้ $(50^\circ + x) + (x + 15^\circ) = 180^\circ$
 $50 + x + x + 15 = 180$
 $2x + 65 = 180$
 $2x = 180 - 65 = 115$
 $x = \frac{115}{2} = 57.5^\circ$
 จะได้มุม $x = 57.5^\circ$ **ตอบ**

2. เส้นขนานและมุมแย้ง

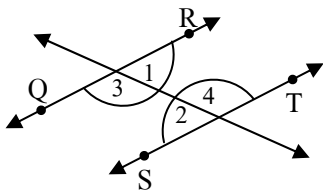
พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เรียก \hat{a} และ \hat{b} ว่าเป็นมุมแย้ง
และ เรียก \hat{c} และ \hat{d} ว่าเป็นมุมแย้งเช่นกัน

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว
มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2

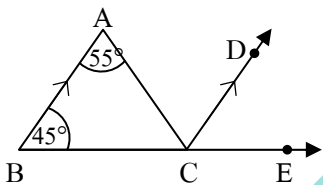


จากรูป $\hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$
 $\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$ } เพราะเป็นมุมที่ประกอบกันเป็นเส้นตรง

ถ้า $\overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{ST}$ แล้ว $\hat{1} = \hat{2}$
แล้ว $\hat{3} = \hat{4}$ } เพราะเป็นมุมแย้ง

ตัวอย่างที่ 3

1.)



จากรูป จงหาขนาดของ $\hat{ACD} + \hat{DCE}$

วิธีทำ จากรูป $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ทำให้ $\hat{BAC} = \hat{ACD}$ เพราะเป็นมุมแย้งกัน
เมื่อ $\hat{BAC} = 55^\circ$ แล้วทำให้ $\hat{ACD} = 55^\circ$ เช่นกัน

จาก $\triangle ABC$ ผลรวมของมุมภายในของ \triangle ต้องเท่ากับ 180 องศา

$$\text{ทำให้ } \hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ$$

$$45^\circ + \hat{BCA} + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{BCA} = 180^\circ - 45^\circ - 55^\circ$$

$$\hat{BCA} = 80^\circ$$

$$\text{จาก } \overrightarrow{BE}; \hat{BCA} + \hat{ACD} + \hat{DCE} = 180^\circ$$

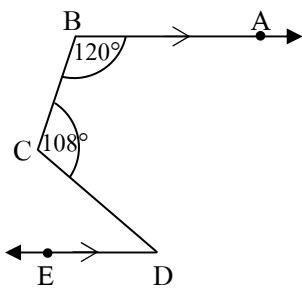
$$80^\circ + 55^\circ + \hat{DCE} = 180^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{DCE} = 180^\circ - 80^\circ - 55^\circ$$

$$\hat{DCE} = 45^\circ$$

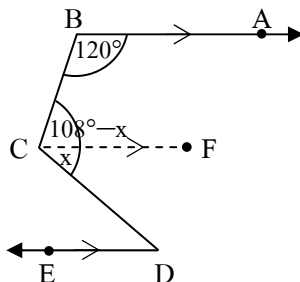
$$\text{ทำให้ทราบว่าขนาดของ } \hat{ACD} + \hat{DCE} = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ \text{ ตอบ}$$

2.)



จากรูป จงหาขนาดของ \widehat{CDE}

วิธีทำ เราสร้างเส้นสมมติที่ขนานกับ \overrightarrow{BA} โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด C
ดังนี้



จากรูป จะได้ \widehat{ABC} และ \widehat{BCF} เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

เมื่อ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CF}$ จะได้ $120^\circ + (108^\circ - x)^\circ = 180^\circ$

$$120^\circ + 108^\circ - x^\circ = 180^\circ$$

ดังนั้น $x = 120^\circ + 108^\circ - 180^\circ$

จะได้ x หรือ $\widehat{FCD} = 48^\circ$

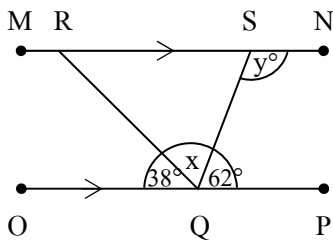
เนื่องจาก $\overrightarrow{CF} \parallel \overrightarrow{DE}$ ทำให้ $\widehat{FCD} = \widehat{CDE}$

ดังนั้น $\widehat{CDE} = \widehat{FCD} = 48^\circ$ **ตอบ**

การใช้มุมแย้งเพื่อยืนยันการขนานกันของเส้นตรงคู่ใด ๆ เป็นตามทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกันก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3.)



จากรูป จงหาขนาดของ $\hat{x} + \hat{y}$

วิธีทำ จาก \overline{OP} จะได้ $38^\circ + x^\circ + 62^\circ = 180^\circ$

ทำให้ได้ $x^\circ = 180^\circ - 38^\circ - 62^\circ$

$$= 80^\circ$$

จากรูป $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ ทำให้ y° และ 62° เป็นมุมที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

จะได้ $y^\circ + 62^\circ = 180^\circ$

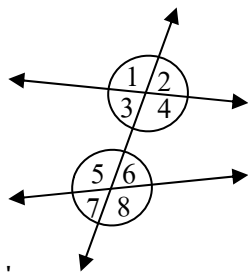
$$y^\circ = 180^\circ - 62^\circ$$

$$y^\circ = 118^\circ$$

ดังนั้น $\hat{x} + \hat{y} = 80 + 118 = 198$ องศา **ตอบ**

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

พิจารณารูปต่อไปนี้



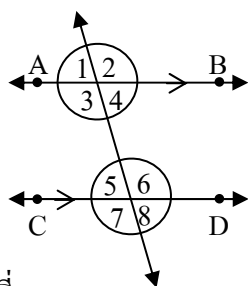
รูปที่ 1

จากรูป เรียก 1, 2, 7 และ 8 ว่ามุมภายนอก

และ เรียก 3, 4, 5 และ 6 ว่ามุมภายใน

ในทำนองเดียวกัน เรียก 1 และ 5, 2 และ 6 และมุมคู่อื่น ๆ

ในลักษณะนี้ว่า มุมภายนอกและมุมภายใน ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดด้วย



รูปที่ 2

จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จะได้ $1 = 5, 2 = 6, 3 = 7$ และ $4 = 8$

โดยแต่ละคู่เป็นมุมภายนอก ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดด้วย

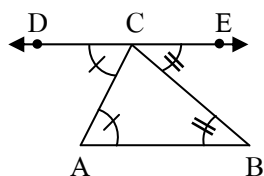
จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายในและมุมภายนอก ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน

ซึ่งจากทฤษฎีบทข้างต้น จะมีวิธีพิสูจน์มากมาย และมีทฤษฎีบทกลับด้วย แต่น้อง ๆ สามารถอ่านเพียงทฤษฎีบทข้างต้น ให้เข้าใจ ก็สามารถแก้ปัญหาค้นหาใจที่เกี่ยวข้องกับเส้นขนานได้แล้วครับ

4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

จากที่เราทราบมาแล้วว่า “ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม รวมกันเท่ากับ 180° ”

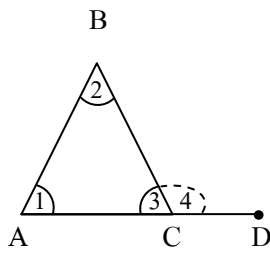


จากรูป $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ } เพราะเป็นมุมแย้ง
และ $\widehat{ABC} = \widehat{BCE}$ }

จะได้ $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = 180^\circ$ เพราะมุมทั้งสามประกอบกันเป็น \overline{DE}

ทำให้เราได้ผลลัพธ์ได้ว่า $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ เช่นกัน

มีอีกมุมหนึ่งที่น่าสนใจครับ



จากรูป $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

จะได้ $\hat{3} = 180^\circ - (\hat{1} + \hat{2})$ ----- ①

และ $\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$ เพราะทั้งสองมุมประกอบกันเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง

จะได้ $\hat{3} = 180^\circ - \hat{4}$ ----- ②

เมื่อ ① = ② ; $180^\circ - (\hat{1} + \hat{2}) = 180^\circ - \hat{4}$

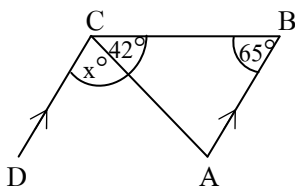
จะได้ $\hat{1} + \hat{2} = \hat{4}$

จากการพิสูจน์ต่าง ๆ ข้างต้นทำให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.)



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จงหาค่า x°

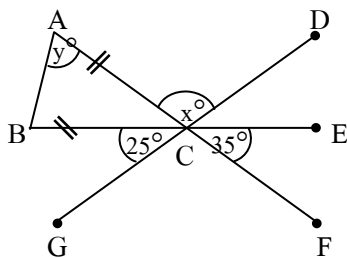
วิธีทำ จาก $\triangle ABC$ จะได้ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
 $\hat{A} + 65^\circ + 42^\circ = 180^\circ$
 $\hat{A} = 180^\circ - (65^\circ + 42^\circ)$
 $= 73^\circ$

โดยที่ \hat{A} และ \hat{x} เป็นมุมแย้ง

ดังนั้น $\hat{x} = \hat{A} = 73^\circ$

ตอบ

2.)



จากรูป กำหนดให้ \overline{AB} เป็นฐานของ \triangle หน้าจั่ว ABC จงหาค่าของ $\hat{x} - \hat{y}$

วิธีทำ จากรูป $\hat{ACB} = \hat{ECF}$
 จะได้ $\hat{ACB} = 35^\circ$
 จาก \overline{DG} จะได้ $\hat{x} + \hat{ACB} + 25^\circ = 180^\circ$
 $\hat{x} + 35^\circ + 25^\circ = 180^\circ$
 $\hat{x} = 180^\circ - (35^\circ + 25^\circ)$
 $\hat{x} = 120^\circ$

จาก Δ หน้าจั่ว ABC เมื่อ $\hat{A}CB$ เป็นมุมยอดมีขนาด 35°

ทำให้มุมที่ฐานของ Δ มีขนาดเท่ากัน

$$\text{จะได้ } \hat{C}AB + \hat{A}BC + \hat{A}CB = 180^\circ \text{ โดยที่ } \hat{C}AB = \hat{A}BC$$

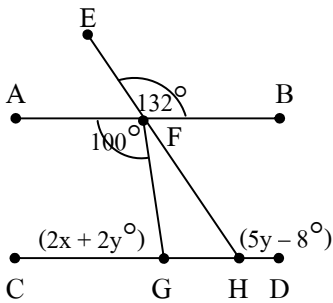
$$2 \hat{C}AB + 35^\circ = 180^\circ$$

$$2 \hat{C}AB = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\hat{C}AB \text{ หรือ } \hat{y} = \frac{145^\circ}{2} = 72.5^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{x} - \hat{y} = 120^\circ - 72.5^\circ = 47.5^\circ \quad \text{ตอบ}$$

3.)



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\hat{C}GF = (2x + 2y)^\circ$ และ $\hat{D}HF = (5y - 8)^\circ$

จงหาค่าของ $x + 2y$

วิธีทำ พิจารณา \overline{AB} จะได้ $\hat{A}FE + \hat{E}FB = 180^\circ$

$$\hat{A}FE + 132^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A}FE = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$$

$$\hat{A}FE = \hat{B}FH \text{ ทำให้ } \hat{B}FH = 48^\circ \text{ เช่นกัน}$$

จากเรื่องขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180°

$$\text{ทำให้ได้ } \hat{B}FH + \hat{F}HD = 180^\circ$$

$$48^\circ + (5y - 8)^\circ = 180^\circ$$

$$5y - 8 = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

$$y = \frac{132^\circ + 8^\circ}{5}$$

$$= \frac{140}{5} = 28$$

และจากหลักการเดียวกัน ทำให้ได้

$$\hat{A}FG + \hat{F}GC = 180^\circ$$

$$100^\circ + (2x + 2y) = 180^\circ$$

แทนค่า $y = 28$ ในสมการ ;

$$100 + (2x + 2(28)) = 180^\circ$$

$$100 + 2x + 56 = 180^\circ$$

$$2x = 180^\circ - (100 + 56)$$

$$2x = 24$$

$$2x = \frac{24}{2} = 12$$

$$\text{ดังนั้น } x + 2y = 12 + 2(28) = 68 \quad \text{ตอบ}$$

