

ทร

5
1



เฉลยข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์

จัดทำโดย เว็บไซต์นายร้อยไทย

เว็บไซต์นายร้อยไทย : บันไดขั้นแรกสู่รั้วโรงเรียนเตรียมทหาร

<http://www.thaicadet.org>

โทรศัพท์. 087 561 2511, 086 571 4623

1. ถ้า $(343)^{-2x} = \frac{14}{2}$ จงหา $\sqrt[3]{\left[\frac{1}{x} - 2\right]}$

1) 2

2) 4

3) -2

4) -8

วิธีทำ

โจทย์ต้องการหาค่าของ $\sqrt[3]{\left[\frac{1}{x} - 2\right]}$ ซึ่งเลขยกกำลังจะกลายเป็นจำนวนจริงลบ
เช่น $(343)^{-2x}$ ก็ยังเป็นไปได้ โดยน้องๆ ต้องทราบก่อนว่า เลขสามกรทศกำลังที่คูณกันได้
- ให้กลายเป็นเลขชี้กำลังที่เป็นบวกได้ * โดยการกลับเศษเป็นส่วน *

เช่น $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ และ $\frac{1}{b^{-n}} = b^n$ เป็นต้น

ดังนั้น $(343)^{-2x} = \frac{1}{(343)^{2x}} = \frac{1}{(7^3)^{2x}}$

$= \frac{1}{7^{(3)(2x)}} = \frac{1}{7^{6x}}$

จึง $(343)^{-2x} = \frac{1}{7^{6x}} = \frac{14}{2}$

$\frac{1}{7^{6x}} = 7^1 = \frac{1}{7^{-1}}$

ทำให้ $6x = -1$ หรือ $x = -\frac{1}{6}$

แทนค่า $x = -\frac{1}{6}$ ใน $\sqrt[3]{\left[\frac{1}{x} - 2\right]}$

$= \sqrt[3]{\left[\frac{1}{(-1/6)} - 2\right]}$

$= \sqrt[3]{-6 - 2} = \sqrt[3]{-8}$

$= \sqrt[3]{(-1)(8)} = (-1)^3 (2)^3$

$= (-1)(2) = -2$ นั่นเอง

ตอบ

hint : $\sqrt[3]{\left[\frac{1}{x} - 2\right]}$ เป็นหนึ่งในตัวประกอบของรากเลขคี่ ซึ่งจำนวนใดๆ ที่อยู่ในรากคี่ขณะนี้
เป็นจำนวนจริงลบได้ แต่ ถ้าจำนวนจริงลบอยู่ในรากเลขคู่ เช่น $\sqrt{-8}$ อย่างนี้ไม่เป็น
-จำนวนจริงนะครับ ทางคณิตศาสตร์ เรียกจำนวนลักษณะนี้ว่า "จำนวนจินตภาพ"
หรือ "Imaginary Number" ซึ่งการหาค่ารากคี่ขณะนี้ น้องๆ จะได้ศึกษา
-ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายครับ

2.
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{(7)(3^{-n})(3^0)}$$
 มีค่าเท่าใด

1) $\frac{3}{7}$

2) $\frac{6}{7}$

3) $-\frac{7}{8}$

4) $-\frac{1}{18}$

วิธีทำ ก่อนแก้ปัญหาลอการิทึมข้อนี้ น้องๆ ต้องทราบเป็นอันดับแรกว่า (จำนวนจริงใดๆ)⁰ เช่น 3⁰ มีค่าเท่ากับ 1 ครับ [3⁰ ≠ 0 แต่ 3⁰ = 1]

ต่อไป เราจะมาพิจารณาว่า เศษส่วนขนาดซิกซ์ เช่น ลอการิทึมข้อนี้ จะถูกแยกตัวประกอบออกมาได้หรือไม่? และ สดท้ายแล้ว มันจะตัดทอนกันเหลือผลลัพธ์เป็นอะไร?

พิจารณาที่ละเทอม คือ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
 โดย $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{1^2} = 9$
 หรือ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^2$
 แล้ว ทำให้ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^2$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left[\frac{1}{9} - \frac{9}{18}\right]$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left[\frac{2-9}{18}\right]$
 $= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left[-\frac{7}{18}\right]$

ดังนั้น เมื่อมองภาพรวม :
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{7(3^{-n})(3^0)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{(-7)}{18} \times 3^n}{7 \times 1}$$

จะย้าย 3⁻ⁿ ไปข้างบน ผลลัพธ์ -n เป็น n

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3^n}} \times (-7) \times \frac{1}{18} \times \cancel{3^n}}{7 \times 1}$$

$$= \frac{-1}{18}$$

เราจึงตอบได้ว่า
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{7(3^{-n})(3^0)} = -\frac{1}{18}$$
 ครับ

ตอบ

$$3. \text{ ถ้า } \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$$

ข้อใดผิด

1) $A + B = 0$

2) $2A - C = -3$

3) $A + C = -1$

4) $-A + B - C = 1$

วิธีทำ

ก่อนแก้โจทย์โจทย์ข้อนี้ น้องๆ ต้องเข้าใจระบบสมการ และมองภาพรวมให้ดีกว่า

สมการที่โจทย์ให้ เป็นสมการ 4 ตัวแปร มีตัวแปร A, B, C และ x

* โจทย์ไม่ได้ขอร้องให้ออกค่า A, B หรือ C

** แต่โจทย์ให้เรา "ตีความสัมพันธ์" ระหว่าง A, B และ C มากกว่า

** โดย keyword ของการแก้โจทย์คือเรื่อง "กำลังสองสมบูรณ์ และผลต่างกำลังสอง" ครับ
มันต่างกันตรงที่ ;

• กำลังสองสมบูรณ์ : $(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + 1^2$

$(x+1)^2 = x^2 + 2(x)(1) + 1^2$

• ผลต่างกำลังสอง : $x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1)$

note: น้องๆ สามารถนัดเพื่อน นัดทำ "หัดฝึกทำ" เขียนไขว่ห้างกันได้ด้วยตนเองครับ

ที่นี่ เรามาพิจารณาในส่วนของ รูปแบบการ "บวก/ลบ" แต่ส่วนกันครับ

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx + C}{(x+1)(x-1)^2}$$

← ต้องมีค่าเท่ากัน!

กลับมามาดูที่โจทย์ ซึ่งกำหนดให้ $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$

ดังนั้น $Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + B + Cx + C = 3x - 1$

จัดรูปอนุกรมใหม่ $\left. \begin{array}{l} \text{นำ term ที่มี} \\ \text{จุดตัดแปรเหมือนกัน} \\ \text{มาอยู่ด้วยกัน} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Ax^2 + Bx^2 - 2Ax + Cx + A - B + C = 3x - 1 \\ (A+B)x^2 - (2A-C)x + (A-B+C) = 3x - 1 \end{array}$

$(A+B)x^2 - (2A-C)x + (A-B+C) = 3x - 1$

แล้ว น้องๆ ต้องรู้แน่ชัดว่า $3x - 1$ ก็คือ $0x^2 + 3x - 1$ นั่นเอง

เมื่อเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์ ระหว่าง ด้านซ้าย และด้านขวา ของเครื่องหมายเท่ากับ จะพบว่า

$A + B = 0$

$-(2A - C) = 3$ หรือ $2A - C = -3$

และ $(A - B + C) = -1$ หรือ $-A + B - C = 1$

เมื่อตัวเลือก (1), (2) และ (4) เป็นตัวเลือกที่ถูกตัดออกแล้ว

ดังนั้น ตัวเลือกที่ผิด คือตัวเลือกที่ 3) ครับ

4. ถ้า $\frac{1}{2x+1} < 0$ แล้ว $\frac{1}{3x+5}$ มีค่าเท่าใด

1) มากกว่า $\frac{2}{7}$

2) น้อยกว่า $\frac{2}{7}$

3) มากกว่า $\frac{7}{2}$

4) น้อยกว่า $\frac{7}{2}$

วิธีทำ

ปกติถ้าเราต้องนิยามค่า เศษส่วนใดๆ มีค่ามากกว่า 0, เท่ากับ 0 หรือ น้อยกว่า 0
 นื่องๆ จะนิยามจากอะไร ครับ ?

แน่นอนว่า เครื่องหมาย (+) หรือ (-) ย่อมต้องเป็นปัจจัยหลักในการนิยาม

กล่าวคือ ถ้า $\frac{1}{\text{จำนวนจริงบวก}}$ เช่น $\frac{1}{2.76}$ ย่อมมีค่ามากกว่า 0

ถ้า $\frac{1}{\text{จำนวนจริงลบ}}$ เช่น $\frac{1}{-3.8}$ ย่อมมีค่าน้อยกว่า 0

ดังนั้น ถ้า $\frac{1}{2x+1} < 0$ แสดงว่า $2x+1$ เป็นจำนวนจริงลบ

หรือกล่าวได้ว่า $2x+1 < 0$

ย้ายข้างอสมการได้

$$2x < -1$$

นั่นคือ

$$x < -\frac{1}{2}$$

ถ้า $n=3$ ไปคูณทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$3x < -\frac{3}{2}$$

ถ้า $n=5$ ไปบวกทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$3x+5 < -\frac{3}{2} + 5$$

$$3x+5 < \frac{7}{2}$$

และ เมื่อต้องมีการกลับเศษเป็นส่วน เราต้องกลับทั้ง 2 ข้าง แล้วเปลี่ยนเครื่องหมาย นลคองความไม่เท่ากัน
 ให้เป็นเครื่องหมายตรงข้าม

จะได้ $\frac{1}{3x+5} > \frac{2}{7}$ นั่นเอง

ตอบ

hint: เราค่อนข้างแน่ใจว่า $3x+5 < \frac{7}{2}$ เป็นคำตอบแรกที่เกตุได้ถูกต้องแน่นอน

แต่ เราอยากรู้ว่า $\frac{1}{3x+5}$ มีค่าเท่าใด อย่างหาก

เราจึงต้องตรวจคำตอบ ด้วยอสมการ $3x+5 < \frac{7}{2}$ ซึ่งได้มาจาก $x < -\frac{1}{2}$

เช่น แทนค่า $x = -1$ จะได้ $3(-1)+5 < \frac{7}{2}$
 $2 < \frac{7}{2}$ จริง

* เมื่อเราต้องการรู้ค่า $\frac{1}{3x+5}$ นี้จะสมมติให้ $3x+5 = \square$

จากอสมการ $3x+5 < \frac{7}{2}$ นั่นคือ $\square < \frac{7}{2}$

ดังนั้น $\frac{2}{\square} < \frac{1}{\square}$ หรือ $\frac{1}{\square} > \frac{2}{7}$

แสดงว่า $\frac{1}{3x+5} > \frac{2}{7}$ นั่นเอง

5. กำหนด $5 \sin 35^\circ = 3$ จงหาค่า $\frac{1 - \cos^2 35^\circ}{\cot 35^\circ + \sec 55^\circ}$

1) $\frac{1}{25}$

2) $\frac{2}{25}$

3) $\frac{3}{25}$

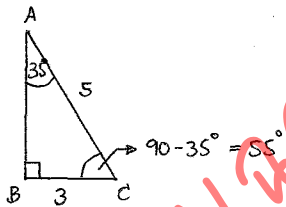
4) $\frac{4}{25}$

วิธีทำ

โจทย์กำหนดให้ $5 \sin 35^\circ = 3$

ดังนั้น $\sin 35^\circ = \frac{3}{5}$

จากอัตราส่วนของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้



หาขนาดความยาว AB ได้

จาก $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$5^2 = AB^2 + 3^2$

$AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

$AB = \sqrt{16} = \pm 4$ หน่วย

* ใช้เฉพาะค่า +4 หน่วย เพราะ AB เป็นระยะทาง มีค่าเป็นบวก

ดังนั้น $\cos 35^\circ = \frac{4}{5}$

$\cot 35^\circ = \frac{4}{3}$

$\sec 55^\circ = \frac{5}{3}$

ทำให้ $\frac{1 - \cos^2 35^\circ}{\cot 35^\circ + \sec 55^\circ} = \frac{1 - (4/5)^2}{4/3 + 5/3}$

$= \frac{1 - \frac{16}{25}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{9}{3}} = \frac{9}{25} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{25}$

ตอบ