

2.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ที่เป็นผลต่างกำลังสอง

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม
โดยที่ $(\sqrt{a})^2 = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก หรือ ศูนย์

แบบฝึกหัด 2.1

จงแยกตัวประกอบ ของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

2. $x^2 - 7 = x^2 - \sqrt{7}^2 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

3. $20 - x^2 = \sqrt{20}^2 - x^2 = (\sqrt{20} + x)(\sqrt{20} - x)$
 $= (2\sqrt{5} + x)(2\sqrt{5} - x)$

เมื่อ $\sqrt{20} = \sqrt{2 \times 2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

4. $18 - x^2 = \sqrt{18}^2 - x^2 = (\sqrt{18} + x)(\sqrt{18} - x)$
 $= (3\sqrt{2} + x)(3\sqrt{2} - x)$

เมื่อ $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{2}$

5. $x^2 - \frac{3}{4} = x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. $x^2 - \frac{5}{36} = x^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

7. $\frac{1}{9}x^2 - 15 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \sqrt{15}^2 = \left(\frac{x}{3} + \sqrt{15}\right)\left(\frac{x}{3} - \sqrt{15}\right)$

8. $\frac{25}{16}x^2 - 24 = \left(\frac{5x}{4}\right)^2 - \sqrt{24}^2 = \left(\frac{5x}{4} + \sqrt{24}\right)\left(\frac{5x}{4} - \sqrt{24}\right)$
 $= \left(\frac{5x}{4} + 2\sqrt{6}\right)\left(\frac{5x}{4} - 2\sqrt{6}\right)$

เมื่อ $\sqrt{24} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{6}$

9. $7x^2 - 24 = (\sqrt{7}x)^2 - \sqrt{24}^2 = (\sqrt{7}x + \sqrt{24})(\sqrt{7}x - \sqrt{24})$
 $= (\sqrt{7}x + 2\sqrt{6})(\sqrt{7}x - 2\sqrt{6})$

10. $(x-1)^2 - 6 = (x-1)^2 - \sqrt{6}^2 = (x-1+\sqrt{6})(x-1-\sqrt{6})$
 $= (x-(1-\sqrt{6}))(x-(1+\sqrt{6}))$

note : $(x-1+\sqrt{6})$ หรือ $(x-1-\sqrt{6})$ ไม่สามารถ \pm กันเป็นผลสำเร็จได้

หมายเหตุ จำนวนเต็ม (คือเลข 1) \pm กับจำนวนอตรรกยะ ($\sqrt{6}$)

11. $(x+3)^2 - 10 = (x+3)^2 - \sqrt{10}^2 = (x+3+\sqrt{10})(x+3-\sqrt{10})$

12. $(x-2)^2 - 27 = (x-2)^2 - \sqrt{3 \times 3 \times 3}^2 = (x-2+3\sqrt{3})(x-2-3\sqrt{3})$
 $= (x-(2-3\sqrt{3}))(x-(2+3\sqrt{3}))$

13. $50 - (x-4)^2 = \sqrt{50}^2 - (x-4)^2 = (\sqrt{50} + (x-4))(\sqrt{50} - (x-4))$
 $= (5\sqrt{2} + (x-4))(5\sqrt{2} - (x-4))$

14. $32 - (x+5)^2 = \sqrt{32}^2 - (x+5)^2 = (\sqrt{32} + (x+5))(\sqrt{32} - (x+5))$
 $= (4\sqrt{2} + (x+5))(4\sqrt{2} - (x+5))$

note : $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = 4\sqrt{2}$

$$15. (2x+3)^2 - 24 = (2x+3)^2 - \sqrt{24}^2 = (2x+3)^2 - (2\sqrt{6})^2 \quad \text{เมื่อ } \sqrt{24} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{6}$$

$$= (2x+3 + 2\sqrt{6})(2x+3 - 2\sqrt{6})$$

$$16. (3x-2)^2 - 52 = (3x-2)^2 - \sqrt{52}^2 = (3x-2)^2 - (2\sqrt{13})^2 \quad \text{เมื่อ } \sqrt{52} = \sqrt{2 \times 2 \times 13} = 2\sqrt{13}$$

$$= (3x-2 + 2\sqrt{13})(3x-2 - 2\sqrt{13})$$

$$17. (5x-1)^2 - 48 = (5x-1)^2 - \sqrt{48}^2 = (5x-1)^2 - \sqrt{4 \times 4 \times 3}^2$$

$$= (5x-1)^2 - (4\sqrt{3})^2$$

$$= (5x-1 + 4\sqrt{3})(5x-1 - 4\sqrt{3})$$

$$18. 72 - (4x+3)^2 = \sqrt{72}^2 - (4x+3)^2 = (\sqrt{72} + (4x+3))(\sqrt{72} - (4x+3))$$

$$\text{เมื่อ } \sqrt{72} = \sqrt{2 \times 6 \times 6} = 6\sqrt{2}$$

$$= (6\sqrt{2} + (4x+3))(6\sqrt{2} - (4x+3))$$

1801

THAI CADET

2.2 กำลังสองสมบูรณ์

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

ตัวอย่างที่ 1

$$x^2 + 10x + 6$$

วิธีทำ

ทำ $x^2 + 10x + 6$ ให้อยู่ในรูป (หน้า)² + 2(หน้า)(หลัง) + (หลัง)² + จำนวนใดๆ

โดยพิจารณา $x^2 + 10x = x^2 + 2(x)(5)$

คือ $x = \text{หน้า}$ และ $5 = \text{หลัง}$

ดังนั้น $x^2 + 2(x)(5)$ คือ หน้า² + 2(หน้า)(หลัง) ซึ่งต้อง + หลัง²

โดยจาก $x^2 + 10x + 6 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 - 5^2 + 6$

$$= (x+5)^2 - 25 + 6$$

$$= (x+5)^2 - 19$$

$$= (x+5)^2 - \sqrt{19}^2$$

$$= ((x+5) + \sqrt{19})(x+5) - \sqrt{19})$$

แบบฝึกหัด 2.2 ก

จงแยกตัวประกอบของนิพจน์ต่อไปนี้ โดยทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned} 1. \quad x^2 + 24x + 140 &= x^2 + 2(x)(12) + 140 \\ &= (x^2 + 2(x)(12) + 12^2) - 12^2 + 140 \\ &= (x+12)^2 - 144 + 140 \\ &= (x+12)^2 - 4 = (x+12)^2 - 2^2 \\ &= (x+12+2)(x+12-2) \\ &= (x+14)(x+10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^2 + 16x - 561 &= x^2 + 2(x)(8) - 561 \\ &= x^2 + 2(x)(8) + 8^2 - 8^2 - 561 \\ &= (x^2 + 2(x)(8) + 64) - 64 - 561 \\ &= (x+8)^2 - 625 = (x+8)^2 - 25^2 \\ &= (x+8+25)(x+8-25) \\ &= (x+33)(x-17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x^2 - 28x + 195 &= x^2 - 2(x)(14) + 195 \\ &= x^2 - 2(x)(14) + 14^2 - 14^2 + 195 \\ &= (x^2 - 28x + 196) - 196 + 195 \\ &= (x-14)^2 - 1 = (x-14)^2 - 1^2 \\ &= (x-14+1)(x-14-1) \\ &= (x-13)(x-15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad x^2 - 26x - 155 &= x^2 - 2(x)(13) - 155 \\
&= x^2 - 2(x)(13) + 13^2 - 13^2 - 155 \\
&= (x - 13)^2 - 169 - 155 \\
&= (x - 13)^2 - 324 \\
&= (x - 13)^2 - 18^2 \\
&= (x - 13 + 18)(x - 13 - 18) \\
&= (x + 5)(x - 31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad x^2 + 8x + 10 &= x^2 + 2(x)(4) + 4^2 - 4^2 + 10 \\
&= (x^2 + 2(x)(4) + 4^2) - 16 + 10 \\
&= (x + 4)^2 - 6 \\
&= (x + 4)^2 - \sqrt{6}^2 \\
&= (x + 4 + \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad x^2 + 2x - 5 &= x^2 + 2(x)(1) + 1^2 - 1^2 - 5 \\
&= (x + 1)^2 - 1 - 5 \\
&= (x + 1)^2 - 6 = (x + 1)^2 - \sqrt{6}^2 \\
&= (x + 1 + \sqrt{6})(x + 1 - \sqrt{6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad x^2 - 6x + 2 &= x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 + 2 \\
&= (x - 3)^2 - 9 + 2 \\
&= (x - 3)^2 - 7 = (x - 3)^2 - \sqrt{7}^2 \\
&= (x - 3 + \sqrt{7})(x - 3 - \sqrt{7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad x^2 - 2x - 10 &= x^2 - 2(x)(1) + 1^2 - 1^2 - 10 \\
&= (x^2 - 2(x)(1) + 1^2) - 1 - 10 \\
&= (x - 1)^2 - 11 \\
&= (x - 1)^2 - \sqrt{11}^2 \\
&= (x - 1 + \sqrt{11})(x - 1 - \sqrt{11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad x^2 + 10x + 1 &= x^2 + 2(x)(5) + 5^2 - 5^2 + 1 \\
&= (x + 5)^2 - 25 + 1 \\
&= (x + 5)^2 - 24 = (x + 5)^2 - \sqrt{24}^2 \\
&= (x + 5 + \sqrt{24})(x + 5 - \sqrt{24}) \\
&= (x + 5 + 2\sqrt{6})(x + 5 - 2\sqrt{6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad x^2 - 7x + 11 &= x^2 - 2(x)\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 11 \\
&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{11}{1} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{44}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\
&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad x^2 + 9x + 19 &= x^2 + 2(x)\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 19 \\
&= \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{19}{1} = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{76}{4} \\
&= \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(x + \frac{9 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{9 - \sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad x^2 + 5x - 2 &= x^2 + 2(x)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 2 \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{8}{4} \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) \\
&= \left(x + \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad x^2 + 11x + 29 &= x^2 + 2(x)\left(\frac{11}{2}\right) + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 29 \\
&= \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + \frac{29}{1} \\
&= \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + \frac{116}{4} = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\
&= \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{11}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(x + \frac{11 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{11 - \sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad x^2 + 7x + 9 &= x^2 + 2(x)\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 9 \\
&= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{9}{1} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{36}{4} \\
&= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \\
&= \left(x + \frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad x^2 - 9x + 12 &= x^2 - 2(x)\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 12 \\
&= \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{12}{1} = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{48}{4} \\
&= \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) \\
&= \left(x - \frac{(9 - \sqrt{33})}{2}\right) \left(x - \frac{(9 + \sqrt{33})}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad x^2 - 15x + 40 &= x^2 - 2(x)\left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{40}{1} \\
&= \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} + \frac{40}{1} \\
&= \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} + \frac{160}{4} = \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{65}{4} \\
&= \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2}\right) \left(x - \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}\right) \\
&= \left(x - \frac{(15 - \sqrt{65})}{2}\right) \left(x - \frac{(15 + \sqrt{65})}{2}\right)
\end{aligned}$$

ตอบ

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 1$ ทำได้โดยทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์
 สำหรับกรณีที่ $a \neq 1$ ก็สามารถทำได้โดยแยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$ ได้เช่นกัน โดยใช้คุณสมบัตินี้
 ทำตัวประกอบของ x^2 ให้เป็น 1 ก่อน ดังตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 - 8x - 35$

$$\begin{aligned}
\text{วิธีทำ} \quad 3x^2 - 8x - 35 &= 3\left(x^2 - \frac{8x}{3} - \frac{35}{3}\right) \\
&= 3\left(x^2 - 2(x)\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3}\right) \quad \text{โดย } \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\
&= 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} - \frac{35}{3}\right) \quad \text{และ } \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \\
&= 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} - \frac{105}{9}\right) \\
&= 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{121}{9}\right) \quad \text{โดย } \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{121}{9} \\
&= 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{11}{3}\right)^2\right) = 3\left(x - \frac{4}{3} + \frac{11}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3} - \frac{11}{3}\right) \\
&= 3\left(x + \frac{7}{3}\right)\left(x - \frac{15}{3}\right) \\
&= 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 5)
\end{aligned}$$

note : สังเกตว่า

$$x^2 - \frac{8x}{3} - \frac{35}{3} = \underbrace{x^2 - 2(x)\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2}_{\text{เท่ากับ } x^2 - \frac{8x}{3} - \frac{35}{3} \text{ เหมือนเดิม}} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3}$$

แต่ทำแบบนี้ เพื่อให้เกิดรูป
"กำลังสองสมบูรณ์"

$$\text{เพราะ } \underbrace{x^2 - 2(x)\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2}_{\text{กำลังสองสมบูรณ์}} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3} = \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3} = \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{35}{3} \quad \text{นั่นเอง} \quad \star$$

แบบฝึกหัด 2.2 ข

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ โดยใช้วิธีทำเป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned}
 1. \quad 3x^2 + 19x - 14 &= 3\left(x^2 + \frac{19x}{3} - \frac{14}{3}\right) \quad \text{เพราะ } 2(x)\left(\frac{19}{6}\right) = x\left(\frac{19}{3}\right) \text{ เหมือนเดิม} \\
 &= 3\left(x^2 + 2(x)\left(\frac{19}{6}\right) + \left(\frac{19}{6}\right)^2 - \left(\frac{19}{6}\right)^2 - \frac{14}{3}\right) \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{19}{6}\right)^2 - \frac{361}{36} - \left(\frac{14 \times 12}{3 \times 12}\right)\right) \quad \text{โดย } \frac{14}{3} = \frac{14 \times 12}{3 \times 12} = \frac{168}{36} \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{19}{6}\right)^2 - \frac{361}{36} - \frac{168}{36}\right) \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{19}{6}\right)^2 - \frac{529}{36}\right) \\
 &= 3\left(\left(x + \frac{19}{6}\right)^2 - \left(\frac{23}{6}\right)^2\right) \\
 &= 3\left(x + \frac{19}{6} + \frac{23}{6}\right)\left(x + \frac{19}{6} - \frac{23}{6}\right) \\
 &= 3\left(x + \frac{42}{6}\right)\left(x - \frac{4}{6}\right) \\
 &= 3(x + 7)\left(x - \frac{2}{3}\right) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad 11x^2 - 142x - 13 &= 11\left(x^2 - \frac{142x}{11} - \frac{13}{11}\right) \quad \text{เพราะ } 2(x)\left(\frac{142}{22}\right) = x\left(\frac{142}{11}\right) \text{ เหมือนเดิม} \\
 &= 11\left(x^2 - 2(x)\left(\frac{142}{22}\right) + \left(\frac{142}{22}\right)^2 - \left(\frac{142}{22}\right)^2 - \frac{13}{11}\right) \quad \text{โดย } \frac{142}{22} = \frac{71}{11} \\
 &= 11\left(\left(x - \frac{71}{11}\right)^2 - \left(\frac{71}{11}\right)^2 - \frac{13}{11}\right) = 11\left(\left(x - \frac{71}{11}\right)^2 - \frac{5,041}{121} - \left(\frac{13 \times 11}{11 \times 11}\right)\right) \\
 &= 11\left(\left(x - \frac{71}{11}\right)^2 - \frac{5,041}{121} - \frac{143}{121}\right) = 11\left(\left(x - \frac{71}{11}\right)^2 - \frac{5,184}{121}\right) \\
 &= 11\left(\left(x - \frac{71}{11}\right)^2 - \left(\frac{72}{11}\right)^2\right) = 11\left(\left(x - \frac{71}{11} + \frac{72}{11}\right)\left(x - \frac{71}{11} - \frac{72}{11}\right)\right) \\
 &= 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(x - \frac{143}{11}\right) = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)(x - 13) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 15x^2 - 77x + 10 &= 15\left(x^2 - \frac{77x}{15} + \frac{10}{15}\right) = 15\left(x^2 - 2(x)\left(\frac{77}{30}\right) + \left(\frac{77}{30}\right)^2 - \left(\frac{77}{30}\right)^2 + \frac{10}{15}\right) \\
 &\quad \text{โดย } \frac{10}{15} = \frac{10 \times 60}{15 \times 60} = \frac{600}{900} \\
 &= 15\left(\left(x - \frac{77}{30}\right)^2 - \frac{5,929}{900} + \frac{600}{900}\right) = 15\left(\left(x - \frac{77}{30}\right)^2 - \frac{5,329}{900}\right) \\
 &= 15\left(\left(x - \frac{77}{30}\right)^2 - \left(\frac{73}{30}\right)^2\right) = 15\left(x - \frac{77}{30} + \frac{73}{30}\right)\left(x - \frac{77}{30} - \frac{73}{30}\right) \\
 &= 15\left(x - \frac{4}{30}\right)\left(x - \frac{150}{30}\right) \\
 &= 15\left(x - \frac{2}{15}\right)(x - 5) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad -2x^2 - 12x + 4 &= -2 \left(x^2 - \frac{12x}{(-2)} + \frac{4}{(-2)} \right) = -2(x^2 + 6x - 2) \\
 &\text{ซึ่งสังเกตว่า } x^2 + 6x - 2 \text{ ไม่สามารถถูกแยกตัวประกอบ แบบธรรมดาได้} \\
 &= -2(x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 - 2) \\
 &= -2((x+3)^2 - 9 - 2) \\
 &= -2((x+3)^2 - 11) = -2((x+3)^2 - (\sqrt{11})^2) \\
 &= -2[(x+3 + \sqrt{11})(x+3 - \sqrt{11})] \\
 &= -2[(x+(3+\sqrt{11}))(x+(3-\sqrt{11}))] \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

hint : ถ้าเปรียบเทียบกับ
จะได้

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x - 2 \quad \text{กับ} \quad ax^2 + bx + c \\
 a = 1, \quad b = 6 \quad \text{และ} \quad c = -2
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 8}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2} \quad \text{โดย } \sqrt{44} \\
 &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11} \quad = \sqrt{2 \times 2 \times 11} \\
 &= 2\sqrt{11}
 \end{aligned}$$

$$\text{จึง} \quad x + 3 + \sqrt{11} = 0$$

$$x = -3 - \sqrt{11}$$

$$\text{และ} \quad x + 3 - \sqrt{11} = 0$$

$$x = -3 + \sqrt{11} \quad \text{จึง} \quad \text{ตอบ}$$

$$5. \quad -3x^2 + 24x + 15 = -3 \left(x^2 + \frac{24x}{(-3)} + \frac{15}{(-3)} \right) = -3(x^2 - 8x - 5)$$

$$= -3(x^2 - 2(x)(4) + 4^2 - 4^2 - 5) = -3((x-4)^2 - 16 - 5)$$

$$= -3((x-4)^2 - 21) = -3((x-4)^2 - (\sqrt{21})^2)$$

โดยที่ $\sqrt{21} = \sqrt{3 \times 7}$ ทั้ง 3 & 7 เป็นจำนวนเฉพาะ ที่ไม่สามารถถูกแยกตัวประกอบได้
ดังนั้น คัดลอกที่สองของ 21 ไม่ได้ ทำให้ $\sqrt{21} = \sqrt{21}$

$$= -3((x-4 + \sqrt{21})(x-4 - \sqrt{21}))$$

$$= -3[(x - (4 - \sqrt{21}))(x - (4 + \sqrt{21}))] \quad \text{ตอบ}$$

$$6. \quad 3x^2 + 5x - 1 = 3 \left(x^2 + \frac{5x}{3} - \frac{1}{3} \right) = 3 \left(x^2 + 2(x) \left(\frac{5}{6} \right) + \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \quad \text{โดย } \frac{1}{3} = \frac{1 \times 12}{3 \times 12}$$

$$= \frac{12}{36}$$

$$= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{12}{36} \right) = 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{37}{36} \right)$$

$$= 3 \left(\left(x + \frac{5}{6} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{6} \right)^2 \right) = 3 \left(x + \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{37}}{6} \right) \left(x + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{37}}{6} \right)$$

$$= 3 \left(x + \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \right) \left(x + \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \right) \quad \text{ตอบ}$$

note : 37 เป็นจำนวนเฉพาะ

ไม่สามารถแยกตัวประกอบของ $\sqrt{37}$ ได้

$$\begin{aligned}
 7. \quad 6x^2 + 36x - 8 &= 6 \left(x^2 + \frac{36x}{6} - \frac{8}{6} \right) = 6 \left(x^2 + 6x - \frac{4}{3} \right) \\
 &= 6 \left(x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 - \frac{4}{3} \right) = 6 \left((x+3)^2 - \frac{9}{1} - \frac{4}{3} \right) \\
 &= 6 \left((x+3)^2 - \frac{27}{3} - \frac{4}{3} \right) = 6 \left((x+3)^2 - \frac{31}{3} \right) \\
 &= 6 \left((x+3)^2 - \sqrt{\frac{31}{3}}^2 \right) = 6 \left(x+3 + \sqrt{\frac{31}{3}} \right) \left(x+3 - \sqrt{\frac{31}{3}} \right) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad 4x^2 + 18x + 10 &= 4 \left(x^2 + \frac{18x}{4} + \frac{10}{4} \right) = 4 \left(x^2 + \frac{9x}{2} + \frac{5}{2} \right) \\
 &= 4 \left(x^2 + 2(x)\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} \right) \quad \text{โดย } \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{8}{8} = \frac{40}{16} \\
 &= 4 \left(\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + \frac{40}{16} \right) = 4 \left(\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{41}{16} \right) \\
 &= 4 \left(\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 \right) = 4 \left(x + \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} \right) \left(x + \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} \right) \\
 &= \left(x + \frac{9 + \sqrt{41}}{4} \right) \left(x + \frac{9 - \sqrt{41}}{4} \right) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad -2x^2 + x + 7 &= -2 \left(x^2 + \frac{x}{(-2)} + \frac{7}{(-2)} \right) = -2 \left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{7}{2} \right) \\
 &= -2 \left(x^2 - 2(x)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{2} \right) \\
 &= -2 \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{7}{2} \right) = -2 \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{56}{16} \right) \\
 &= -2 \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{57}{16} \right) = -2 \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{57}}{4}\right)^2 \right) \\
 &= -2 \left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4} \right) \\
 &= -2 \left(x - \frac{(1 - \sqrt{57})}{4} \right) \left(x - \frac{(1 + \sqrt{57})}{4} \right) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad -x^2 + 5x - 3 &= -1(x^2 - 5x + 3) = -1 \left(x^2 - 2(x)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \right) \\
 &= -1 \left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 \right) \quad \text{โดย } 3 = 3 \times \frac{4}{4} = \frac{12}{4} \\
 &= -1 \left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{12}{4} \right) = -1 \left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \right) \\
 &= -1 \left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \right) = (-1) \left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) \left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) \\
 &= -1 \left(x - \frac{(5 - \sqrt{13})}{2} \right) \left(x - \frac{(5 + \sqrt{13})}{2} \right) \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad 10x^2 + 17x + 4 &= 10 \left(x^2 + \frac{17x}{10} + \frac{4}{10} \right) = 10 \left(x^2 + \frac{17x}{10} + \frac{2}{5} \right) \\
&= 10 \left(x^2 + 2(x) \left(\frac{17}{20} \right) + \left(\frac{17}{20} \right)^2 - \left(\frac{17}{20} \right)^2 + \frac{2}{5} \right) \quad \text{โดย } \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{80}{80} = \frac{160}{400} \\
&= 10 \left(\left(x + \frac{17}{20} \right)^2 - \left(\frac{17}{20} \right)^2 \right) \\
&= 10 \left(x + \frac{17}{20} + \frac{\sqrt{129}}{20} \right) \left(x + \frac{17}{20} - \frac{\sqrt{129}}{20} \right) \\
&= 10 \left(x + \frac{17 + \sqrt{129}}{20} \right) \left(x + \frac{17 - \sqrt{129}}{20} \right) \quad \underline{\text{จบ}}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad -4x^2 - 26x - 4 &= -4 \left(x^2 + \frac{26x}{4} + \frac{4}{4} \right) = -4 \left(x^2 + \frac{13x}{2} + 1 \right) \\
&= -4 \left(x^2 + 2(x) \left(\frac{13}{4} \right) + \left(\frac{13}{4} \right)^2 - \left(\frac{13}{4} \right)^2 + 1 \right) \\
&= -4 \left(\left(x + \frac{13}{4} \right)^2 - \frac{169}{16} + \frac{16}{16} \right) \\
&= -4 \left(\left(x + \frac{13}{4} \right)^2 - \frac{153}{16} \right) \\
&= -4 \left(\left(x + \frac{13}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{153}}{4} \right)^2 \right) \\
&= -4 \left(x + \frac{13}{4} - \frac{\sqrt{153}}{4} \right) \left(x + \frac{13}{4} + \frac{\sqrt{153}}{4} \right) \\
&= -4 \left(x - \frac{(13 - \sqrt{153})}{4} \right) \left(x - \frac{(13 + \sqrt{153})}{4} \right) \quad \underline{\text{จบ}}$$

ทำได้เหมือนกัน

จากสูตร การแยกตัวประกอบ ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x^2 + 2ax + a^2 &= (x+a)^2 \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว} \\x^2 - 2ax + a^2 &= (x-a)^2 \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}\end{aligned}$$

เราสามารถหาคำศัพท์ที่คล้ายๆ กันมาใช้แยกตัวประกอบของพหุนาม ที่มีสัมประสิทธิ์ของบางจน์ไม่เป็นจำนวนเต็มได้ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}1. \quad x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 &= x^2 + 2(x)\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \\ &= (x + \sqrt{2})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad x^2 - x + \frac{1}{4} &= x^2 - 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

แล้ว จึงแยกตัวประกอบ พหุนาม ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}1) \quad x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 &= x^2 - 2(x)\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 \\ &= (x - \sqrt{5})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad x^2 + x + \frac{1}{4} &= x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 &= x^2 + 2(x)(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 \\ &= (x + 2\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \quad x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} &= x^2 - 2(x)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

ตอบ

2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนาม ตีกรู้ล่วงหน้าสอง ที่มีส่วนประกอบที่ไปในจำนวนเต็ม

พิจารณาพหุนาม ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. (x+5)(x^2-5x+25) &= x^2(x+5) - 5x(x+5) + 25(x+5) \\ &= x^3 + 5x^2 - 5x^2 - 25x + 25x + 125 \\ &= x^3 + 125 \\ &= x^3 + 5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (2x-3)(4x^2+6x+9) &= 4x^2(2x-3) + 6x(2x-3) + 9(2x-3) \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 12x^2 - 18x + 18x - 27 \\ &= 8x^3 - 27 \\ &= (2x)^3 - 3^3 \end{aligned}$$

เรียกพหุนาม เช่น $x^3 + 5^3$ ว่า "ผลบวกของกำลังสาม"
และ เรียกพหุนาม เช่น $(2x)^3 - 3^3$ ว่า "ผลต่างของกำลังสาม"

- ▶ ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็น term ใดๆ ของพหุนาม เรียกพหุนามรูป $A^3 + B^3$ ว่า "ผลบวกกำลังสาม" และเรียกพหุนามรูป $A^3 - B^3$ ว่า "ผลต่างกำลังสาม"
- ▶ เราแยกตัวประกอบ ของพหุนามดังกล่าวได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A+B)(A^2 - AB + B^2) \\ A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2) \end{aligned}$$

และเมื่อให้ง่าย ต่อการจำ จำสูตรที่ว่า

$$\begin{aligned} (\text{หน้า})^3 + (\text{หลัง})^3 &= (\text{หน้า} + \text{หลัง})(\text{หน้า}^2 - (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + \text{หลัง}^2) \\ (\text{หน้า})^3 - (\text{หลัง})^3 &= (\text{หน้า} - \text{หลัง})(\text{หน้า}^2 + (\text{หน้า})(\text{หลัง}) + \text{หลัง}^2) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.3 ก

จงแยกตัวประกอบ ของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. \quad x^3 + 27 &= x^3 + 3^3 \\ &= (x+3)(x^2 - (x)(3) + 3^2) \\ &= (x+3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad y^3 + 64 &= y^3 + 4^3 \\ &= (y+4)(y^2 - y(4) + 4^2) \\ &= (y+4)(y^2 - 4y + 16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 8x^3 + 1 &= (2x)^3 + 1^3 \\ &= (2x+1)((2x)^2 - (2x)(1) + 1^2) \\ &= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad 64z^3 + 125 &= (4z)^3 + 5^3 \\ &= (4z+5)((4z)^2 - (4z)(5) + 5^2) \\ &= (4z+5)(16z^2 - 20z + 25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad 27x^3 + 512y^3 &= (3x)^3 + (8y)^3 \\ &= (3x+8y)((3x)^2 - (3x)(8y) + (8y)^2) \\ &= (3x+8y)(9x^2 - 24xy + 64y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad 729 + (x-2)^3 &= 9^3 + (x-2)^3 \\ &= (9+(x-2))(9^2 - (9)(x-2) + (x-2)^2) \\ &= (9+x-2)(81 - 9x + 18 + x^2 - 4x + 4) \\ &= (x+7)(x^2 - 13x + 103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad (3x-1)^3 + (x-4)^3 &= [(3x-1)+(x-4)][(3x-1)^2 - (3x-1)(x-4) + (x-4)^2] \\ &= [3x-1+x-4][9x^2 - 6x + 1 - (3x^2 - x - 12x + 4) + (x^2 - 8x + 16)] \\ &= [4x-5][9x^2 - 6x + 1 - 3x^2 + x + 12x - 4 + x^2 - 8x + 16] \\ &= [4x-5][7x^2 - x + 13] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad (2x+5)^3 + (5x-9)^3 &= [(2x+5)+(5x-9)][(2x+5)^2 - (2x+5)(5x-9) + (5x-9)^2] \\ &= [7x-4][4x^2 + 20x + 25 - (10x^2 + 25x - 18x - 45) + 25x^2 - 90x + 81] \\ &= [7x-4][4x^2 - 10x^2 + 25x^2 + 20x - 25x + 18x - 90x + 25 + 45 + 81] \\ &= [7x-4][19x^2 - 77x + 151] \end{aligned}$$

ถ้าให้ง่ายกว่านี้ ใช้สูตร

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{مثال: } (2x+5)^3 + (5x-9)^3 &= ((2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + 5^3) \\
 &\quad + ((5x)^3 - 3(5x)^2(9) + 3(5x)(9)^2 - 9^3) \\
 &= (8x^3 + 60x^2 + 150x + 125) + (125x^3 - 675x^2 + 1215x - 729) \\
 &= 133x^3 - 615x^2 + 1365x - 604
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad x^3 - 1 &= x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x(1) + 1^2) \\
 &= (x-1)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad z^3 - 216 &= z^3 - 6^3 = (z-6)(z^2 + z(6) + 6^2) \\
 &= (z-6)(z^2 + 6z + 36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad 125y^3 - 64 &= (5y)^3 - 4^3 = (5y-4)((5y)^2 + (5y)(4) + 4^2) \\
 &= (5y-4)(25y^2 + 20y + 16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad 1000 - 216x^3 &= 10^3 - (6x)^3 = (10-6x)(10^2 + (10)(6x) + (6x)^2) \\
 &= (10-6x)(100 + 60x + 36x^2) \\
 &= (10-6x)(36x^2 + 60x + 100)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad 1,331y^3 - 343z^3 &= (11y)^3 - (7z)^3 = (11y-7z)((11y)^2 + (11y)(7z) + (7z)^2) \\
 &= (11y-7z)(121y^2 + 77yz + 49z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad (4x+3)^3 - 125 &= (4x+3)^3 - 5^3 = [(4x+3)-5][(4x+3)^2 + (4x+3)(5) + 5^2] \\
 &= (4x-2)[16x^2 + 24x + 9 + 20x + 15 + 25] \\
 &= 2(x-2)[16x^2 + 44x + 49]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad (7x-2)^3 - (6x+9)^3 &= [(7x-2)-(6x+9)][(7x-2)^2 + (7x-2)(6x+9) + (6x+9)^2] \\
 &= [x-11][49x^2 - 28x + 4 + 42x^2 - 12x + 63x - 18 + 36x^2 + 108x + 81] \\
 &= [x-11][49x^2 + 42x^2 + 36x^2 - 28x - 12x + 63x + 108x + 4 - 18 + 81] \\
 &= [x-11][127x^2 + 131x + 67]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad (8x-15)^3 - (3x-7)^3 &= ((8x-15)-(3x-7))((8x-15)^2 + (8x-15)(3x-7) + (3x-7)^2) \\
 &= (5x-8)(64x^2 - 240x + 225 + 24x^2 - 45x - 56x + 105 + 9x^2 - 42x + 49) \\
 &= (5x-8)(64x^2 + 24x^2 + 9x^2 - 240x - 45x - 56x - 42x + 225 + 105 + 49) \\
 &= (5x-8)(97x^2 - 383x + 379)
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.3 ๑

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1. \quad x^4 - 625 &= (x^2)^2 - 25^2 \\ &= (x^2 + 25)(x^2 - 25) \quad \text{โดย } (x^2 - 25) = (x + 5)(x - 5) \\ &= (x^2 + 25)(x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 81y^4 - 125 &= (9y^2)^2 - (5\sqrt{5})^2 \\ &= (9y^2 + 5\sqrt{5})(9y^2 - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 81x^4 - 256y^4 &= (9x^2)^2 - (16)^2 \\ &= (9x^2 + 16)(9x^2 - 16) \quad \text{โดย } 9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 \\ &= (9x^2 + 16)(3x + 4)(3x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4) + 3x^2 \\ &= (x^2)^2 + 2(x^2)(2) + 2^2 - 2(x^2)(2) + 3x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 + 3x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 2 + x)(x^2 + 2 - x) \\ &= (2x^2 + 2)(2) = 2(2x^2 + 2) = 4(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad y^4 + 6y^2 + 25 &= (y^4 + 6y^2) + 25 \\ &= (y^2)^2 + 2(y^2)(3) + 3^2 - 3^2 + 25 \\ &= (y^2 + 3)^2 - 9 + 25 \\ &= (y^2 + 3)^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad x^4 + 64 &= (x^2)^2 + 8^2 \\ &= (x^2)^2 + 2(x^2)(8) + 8^2 - 2(x^2)(8) \\ &= (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\ &= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x) \\ &= (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad y^4 + 324 &= (y^2)^2 + 18^2 \\ &= (y^2)^2 + 2(y^2)(18) + 18^2 - 2(y^2)(18) \\ &= (y^2 + 18)^2 - 36y^2 \\ &= (y^2 + 18)^2 - (6y)^2 \\ &= (y^2 + 18 + 6y)(y^2 + 18 - 6y) \\ &= (y^2 + 6y + 18)(y^2 - 6y + 18) \end{aligned}$$

$$8. y^6 - 1 = (y^3)^2 - 1^2 = (y^3 + 1)(y^3 - 1) \\ = (y+1)(y^2 - y + 1)(y-1)(y^2 + y + 1)$$

$$9. 64x^6 - 729 = (4x^2)^3 - 9^3 = (4x^2 - 9)((4x^2)^2 + (4x^2)(9) + 9^2) \\ = ((2x)^2 - 3^2)(16x^4 + 36x^2 + 81) \\ = (2x+3)(2x-3)(16x^4 + 36x^2 + 81)$$

$$10. x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)((x^2)^2 + (x^2)(y^2) + (y^2)^2) \\ = (x+y)(x-y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) \\ = (x+y)(x-y)(x^2)^2 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ = (x+y)(x-y)((x^2 + y^2)^2 - (xy)^2) \\ = (x+y)(x-y)(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

$$11. x^6 + 216 = (x^2)^3 + 6^3 = (x^2 + 6)((x^2)^2 - (x^2)(6) + 6^2) \\ = (x^2 + 6)(x^4 - 2(x^2)(3) + 3^2 - 3^2 + 6^2) \\ = (x^2 + 6)((x^2 - 3)^2 - 9 + 36) \\ = (x^2 + 6)((x^2 - 3)^2 + 27)$$

$$12. 343x^6 + 1000z^6 = (7x^2)^3 + (10z^2)^3 \\ = (7x^2 + 10z^2)((7x^2)^2 - (7x^2)(10z^2) + (10z^2)^2) \\ = (7x^2 + 10z^2)(49x^4 - 70x^2z^2 + 100z^4) \\ = (7x^2 + 10z^2)((7x^2)^2 - 2(7x^2)(5z^2) + (5z^2)^2 - (5z^2)^2 + 100z^4) \\ = (7x^2 + 10z^2)((7x^2 - 5z^2)^2 - 25z^4 + 100z^4) \\ = (7x^2 + 10z^2)((7x^2 - 5z^2)^2 + 75z^4)$$

$$13. 512 - y^6 = 8^3 - (y^2)^3 \\ = (8 - y^2)(8^2 + 8y^2 + (y^2)^2) \\ = (2\sqrt{2})^2 - y^2((y^2)^2 + 8y^2 + 8^2) \\ = ((2\sqrt{2})^2 - y^2)((y^2)^2 + 2(y^2)(4) + 4^2 - 4^2 + 8^2) \\ = ((2\sqrt{2})^2 - y^2)((y^2 + 4)^2 - 16 + 64) \\ = (2\sqrt{2} + y)(2\sqrt{2} - y)((y^2 + 4)^2 + 48)$$

$$14. 216x^6 - 27y^6 = (6x^2)^3 - (3y^2)^3 = (6x^2 - 3y^2)((6x^2)^2 + (6x^2)(3y^2) + (3y^2)^2) \\ = (\sqrt{6}x - \sqrt{3}y)((6x^2)^2 + 18x^2y^2 + 9y^4) \\ = (\sqrt{6}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{6}x - \sqrt{3}y)((6x^2)^2 + 2(6x^2)(\frac{3}{2}y^2) + (\frac{3}{2}y^2)^2 - (\frac{3}{2}y^2)^2 + 9y^4) \\ = (\sqrt{6}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{6}x - \sqrt{3}y)((6x^2 + \frac{3}{2}y^2)^2 - \frac{9y^4}{4} + \frac{9y^4}{1}) \quad \frac{9y^4}{1} - \frac{36}{4} \\ = (\sqrt{6}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{6}x - \sqrt{3}y)((6x^2 + \frac{3}{2}y^2)^2 - \frac{9y^4}{4} + \frac{36y^4}{4}) \\ = (\sqrt{6}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{6}x - \sqrt{3}y)((6x^2 + \frac{3}{2}y^2)^2 + \frac{27y^4}{4}) \quad \frac{36y^4}{4}$$

hint : $-\frac{9y^4}{4} + \frac{9y^4}{1} = -\frac{9y^4}{4} + \frac{36y^4}{4} = +\frac{27y^4}{4}$

แบบฝึกหัด 2.3 ค

จงแยกตัวประกอบ ของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^3 - x^2 - x + 1 &= x^3 - x^2 - (x-1) \\
 &= x^2(x-1) - (x-1) \\
 &= (x-1)(x^2-1) \\
 &= (x-1)(x+1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad y^4 + 2y^3 - y - 2 &= y^4 + 2y^3 - (y+2) \\
 &= y^3(y+2) - (y+2) \\
 &= (y+2)(y^3-1) \\
 &= (y+2)(y-1)(y^2+y+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad z^3 + z^2 - 4z - 64 &= z^3 - 64 + z^2 - 4z \\
 &= (z^3 - 64) + (z^2 - 4z) \\
 &= (z-4)(z^2 + 4z + 16) + z(z-4) \\
 &= (z-4)[z^2 + 4z + 16 + z] \\
 &= (z-4)[z^2 + 5z + 16]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad y^3 + 9y^2 - 54y - 216 &= y^3 - 216 + 9y^2 - 54y \\
 &= (y^3 - 6^3) + (9y^2 - 54y) \\
 &= (y-6)(y^2 + 6y + 36) + 9y(y-6) \\
 &= (y-6)[y^2 + 6y + 36 + 9y] \\
 &= (y-6)[y^2 + 15y + 36] \\
 &= (y-6)[(y+12)(y+3)] \\
 &= (y+3)(y+12)(y-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad x^3 - 5x^2 - 15x + 27 &= x^3 + 27 - 5x^2 - 15x \\
 &= (x^3 + 27) - (5x^2 + 15x) \\
 &= (x^3 + 27) - 5x(x+3) \\
 &= (x+3)(x^2 - 3x + 9) - 5x(x+3) \\
 &= (x+3)(x^2 - 3x + 9 - 5x) \\
 &= (x+3)(x^2 - 8x + 9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad 6x^3 + 12xy^2 + 4xy^2 + 8y^3 &= (6x^3 + 12xy^2) + (4xy^2 + 8y^3) \\
 &= 6x^2(x+2y) + 4y^2(x+2y) \\
 &= (x+2y)(6x^2 + 4y^2) \\
 &= (x+2y)(2)(3x^2 + 2y^2) \\
 &= 2(x+2y)(3x^2 + 2y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x &= (x^4 - 3x^3) - (4x^2 - 12x) \\
 &= x^3(x-3) - 4x(x-3) \\
 &= (x-3)(x^3 - 4x) \\
 &= (x-3)(x)(x^2 - 4) \\
 &= (x-3)(x)(x+2)(x-2) \\
 &= (x)(x+2)(x-2)(x-3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad 9x^4 - y^2 - 6y - 9 &= (3x^2)^2 - (y^2 + 6y + 9) \\
 &= (3x^2)^2 - (y+3)(y+3) \\
 &= (3x^2)^2 - (y+3)^2 \\
 &= (3x^2 + (y+3))(3x^2 - (y+3)) \\
 &= (3x^2 + y + 3)(3x^2 - y - 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad 4x^4 - 4x^2y + y^2 - 121 &= ((2x^2)^2 - 2(2x^2)(y) + y^2) - 11^2 \\
 &= (2x^2 - y)^2 - 11^2 \\
 &= (2x^2 - y + 11)(2x^2 - y - 11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad 9x^4 - 6x^2y + y^2 - 9 &= ((3x^2)^2 - 2(3x^2)y + y^2) - 3^2 \\
 &= (3x^2 - y)^2 - 3^2 \\
 &= (3x^2 - y + 3)(3x^2 - y - 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad 1 - x^2 - 2xy^2 - y^4 &= 1 - (x^2 + 2xy^2 + y^4) \\
 &= 1^2 - (x + y^2)^2 \\
 &= (1 + (x + y^2))(1 - (x + y^2)) \\
 &= (1 + x + y^2)(1 - x - y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad x^4 - 4y^4 - 20y^2 - 25 &= (x^2)^2 - (4y^4 + 20y^2 + 25) \\
 &= (x^2)^2 - ((2y^2)^2 + 2(2y^2)(5) + 5^2) \\
 &= (x^2)^2 - (2y^2 + 5)^2 \\
 &= (x^2 + (2y^2 + 5))(x^2 - (2y^2 + 5)) \\
 &= (x^2 + 2y^2 + 5)(x^2 - 2y^2 - 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad x^4 - 2ax^2 + a^2 - z^2 &\text{ is } a = \text{constant (ধ্রুবক)} \\
 &= ((x^2)^2 - 2(x^2)(a) + a^2) - z^2 \\
 &= (x^2 - a)^2 - z^2 \\
 &= (x^2 - a + z)(x^2 - a - z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & 4x^4 - 4ax^2 + 2by + a^2 - b^2 - y^2 \\
&= ((2x^2)^2 - 2(2x^2)(a) + a^2) - (b^2 - 2by + y^2) \\
&= (2x^2 - a)^2 - (b - y)^2 \\
&= (2x^2 - a + b - y)(2x^2 - a - b + y) \\
&= (2x^2 - a + b - y)(2x^2 - a - b + y)
\end{aligned}$$

1101

THAI CADET

2.4 การแยกตัวประกอบของพหุนาม ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

Ex 1 หารหารพหุนาม $2x^2 - 5x + 6$ ด้วยพหุนาม $x - 3$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ x - 3 \overline{) 2x^2 - 5x + 6} \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ x + 6 \\ \underline{x - 3} \\ 9 \end{array}$$

จากกรรขารข้างต้น จะเห็นว่า เมื่อหารพหุนาม $2x^2 - 5x + 6$ ด้วยพหุนาม $x - 3$ จะได้เศษ = 9

ให้ $P(x)$ แทนพหุนาม $2x^2 - 5x + 6$

นั่นคือ $P(x) = 2x^2 - 5x + 6$

เมื่อ $x - 3 = 0$ หรือ $x = 3$ และแทนค่า $x = 3$ ใน $P(x)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(x) = P(3) &= 2(3)^2 - 5(3) + 6 \\ &= 2(9) - 15 + 6 \\ &= 18 - 15 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(3)$ เป็นค่าที่ได้จากการแทน x ด้วย 3 ในพหุนาม $P(x)$

จะเห็นว่า $P(3)$ มีค่าเท่ากับ "เศษ" ที่ได้จากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - 3$

จะได้

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem) ่า
 " ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - a$ ที่ a เป็นค่าคงตัว
 แล้ว จะได้เศษเหลือเป็น $P(a)$ "

Ex 2 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ หารเศษที่ได้จากกรรขาร $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ด้วย $x - 3$

วิธีทำ

ให้ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

นิจากรค $x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } x = 3 \text{ ใน } P(x) ; \quad P(3) &= 3^3 + 4(3)^2 - 11(3) - 30 \\ &= 27 + 36 - 33 - 30 \\ &= 63 - 63 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เศษเหลือเท่ากับ 0

ตอบ

note: สังเกตว่า เมื่อหาร $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ด้วย $x - 3$ จะได้เศษจากกรรขาร = 0

เศษจากกรรขาร = 0 นัยความว่า "หารลงตัว"

ดังนั้น $x - 3$ เป็นหนึ่งในตัวประกอบของ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

เมื่อต้องการจะแยกตัวประกอบของ $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ ต่อไป ก็หาคำหารด้วย $x - 3$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 7x + 10 \\
 x-3 \overline{) x^3 + 4x^2 - 11x - 30} \\
 \underline{x^3 - 3x^2} \\
 7x^2 - 11x \\
 \underline{7x^2 - 21x} \\
 10x - 30 \\
 \underline{10x - 30} \\
 0
 \end{array}$$

แล้วทำ $\frac{x^3 + 4x^2 - 11x - 30}{x - 3} = x^2 + 7x + 10$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$
 $= (x - 3)(x + 5)(x + 2)$

ถ้า $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ เป็น ตัวตั้ง
 $x - 3$ เป็น ตัวหาร
 $x^2 + 7x + 10$ เป็น ผลหาร
 0 เป็น เศษจากการหาร

เพื่อให้เข้าใจง่าย ๆ ทำ ตัวตั้ง = [(ตัวหาร) \times (ผลหาร)] + (เศษจากการหาร)
 $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = [(x - 3)(x^2 + 7x + 10)] + 0$ นั่นเอง

★★ ถ้ารูปแบบง่าย ๆ ระบุว่า ด้วยตัวอย่างง่าย ๆ ดังนี้

1) $3 \overline{) 10} \begin{array}{r} 3 \\ 9 \\ \underline{1} \end{array}$ แล้ว $\frac{10}{3} = 3$ เศษ 1 หรือ $10 = (3 \times 3) + 1$

2) $4 \overline{) 10} \begin{array}{r} 2 \\ 8 \\ \underline{2} \end{array}$ แล้ว $\frac{10}{4} = 2$ เศษ 2 หรือ $10 = (4 \times 2) + 2$

3) $5 \overline{) 10} \begin{array}{r} 2 \\ 10 \\ \underline{0} \end{array}$ แล้ว $\frac{10}{5} = 2$ เศษ 0 หรือ $10 = (5 \times 2) + 0$ นั่นเอง

เห็นไหมครับ ว่ารูปแบบมันง่าย ภาควิจัย ๆ

ตัวอย่างที่ 1

จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - x^2 - 8x + 12$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

หารลงตัวเป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ 12

และตัวประกอบทั้งหมดของ 12 (ทั้งจำนวนเต็มบวก และจำนวนเต็มลบ)

ซึ่งเป็นจำนวนที่สามารถหาร 12 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 และ -12

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } P(1) &= 1^3 - 1^2 - 8(1) + 12 \\ &= 1 - 1 - 8 + 12 \\ &= 4 \end{aligned}$$

แสดงว่า $P(1) \neq 0$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{พิจารณา } P(2) &= 2^3 - 2^2 - 8(2) + 12 \\ &= 8 - 4 - 16 + 12 \\ &= 20 - 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x-2$ เป็นหนึ่งในตัวประกอบของ $P(x)$

ถ้า $x-2$ หาร $P(x)$ ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 8x + 12} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 8x \\ \underline{ x^2 - 2x} \\ - 6x + 12 \\ \underline{ - 6x + 12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad x^3 - x^2 - 8x + 12 &= (x-2)(x^2 + x - 6) \\ &= (x-2)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

$$\text{หรือ} \quad x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3)$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2
วิธีทำ

จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 3x^2 - 2$

พิจารณาก่อนว่า $x^3 + 3x^2 - 2 = x^3 + 3x^2 + 0x^1 - 2$

ผลที่เห็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ -2

จำนวนเต็มหาร -2 ได้ลงตัวคือ $1, -1, 2, \text{ และ } -2$

✓ พิจารณา $P(1) = 1^3 + 3(1)^2 + 0(1) - 2$
 $= 1 + 3 + 0 - 2$
 $= 2$
 จะเห็นว่า $P(1) \neq 0$

✓ พิจารณา $P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 0(-1) - 2$
 $= -1 + 3 + 0 - 2$
 $= 3 - 3 = 0$

ดังนั้น $x - (-1)$ หรือ $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $(x+1)$ ไปหาร $P(x)$ ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 2 \\ x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + 0x^1 - 2} \\ \underline{x^3 + 1x^2} \\ 2x^2 + 0x^1 \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$

ซึ่ง $(x^2 + 2x - 2)$ แยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป $x - a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มไม่ได้

ดังนั้น จึงสรุปว่า $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$

ตอบ

hint

✓ พิจารณา $x^2 + 2x - 2 = 1x^2 + 2x - 2$

กับรูปทั่วไปของ $ax^2 + bx + c$

ดังนั้น $a = 1, b = 2$ และ $c = -2$

หาค่า x ได้จาก $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

เมื่อ $\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \quad \text{จะได้ } x = \begin{cases} 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

จึงกล่าวได้ว่า $P(x) = (x-1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3
วิธีทำ

จงแยกตัวประกอบของ $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

กำหนดให้ $P(x) = x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

หารที่ $x = -81$ เป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ -81

จำนวนเต็มพหุคูณ -81 ได้ลงตัว คือ $1, -1, 3, -3, 9, -9, 27, -27, 81$ และ -81

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } P(1) &= 1^4 + 3(1)^3 - 27(1) - 81 \\ &= 1 + 3 - 27 - 81 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } P(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 27(-1) - 81 \\ &= 1 - 3 + 27 - 81 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{พิจารณา } P(3) &= 3^4 + 3(3)^3 - 27(3) - 81 \\ &= 81 + 81 - 81 - 81 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x-3$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$

นำ $x-3$ ไปหาร $x^4 + 3x^3 - 27x - 81$ ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 18x + 27 \\ x-3 \overline{) x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 27x - 81} \\ \underline{x^4 - 3x^3} \\ 6x^3 + 0x^2 \\ \underline{6x^3 - 18x^2} \\ 18x^2 - 27x \\ \underline{18x^2 - 54x} \\ 27x - 81 \\ \underline{27x - 81} \\ 0 \end{array}$$

จะได้ $P(x) = (x-3)(x^3 + 6x^2 + 18x + 27)$

ให้ $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 18x + 27$

หารที่ $x = +27$ เป็นค่าคงตัวของ $Q(x)$ คือ $1, -1, 3, -3, 9, -9, 27$ และ -27

พิจารณา $Q(1), Q(-1), Q(3)$ พบว่า ทั้งหมด $\neq 0$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{พิจารณา } Q(-3) &= (-3)^3 + 6(-3)^2 + 18(-3) + 27 \\ &= -27 + 54 - 54 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - (-3) = x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$

ถ้า $x+3$ หาร $x^3 + 6x^2 + 18x + 27$ ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 9 \\ x+3 \overline{) x^3 + 6x^2 + 18x + 27} \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ 3x^2 + 18x \\ \underline{3x^2 + 9x} \\ 9x + 27 \\ \underline{9x + 27} \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $Q(x) = (x+3)(x^2 + 3x + 9)$

เมื่อ $x^2 + 3x + 9$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป $x-a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มได้

ดังนั้น สรุปว่า
$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 3x^3 - 27x - 81 \\ &= (x-3)Q(x) \\ &= (x-3)(x+3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

ตอบ

THAI
CADET

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนด $P(x)$ และ a ดังแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา $P(a)$
แบบฝึกหัดนี้ ออกให้เรา แทนค่า x ด้วย a เมื่อเห็นว่า $P(a) = 0$ หรือไม่
ถ้า $P(x)$ หรือ $P(a) = 0$ แสดงว่า $x = a$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ นั่นเอง

1) $P(x) = x^3 - x^2 + 10x - 8$ และ $a = 3$
ดังนั้น $P(a) = a^3 - a^2 + 10(a) - 8$
 $= 3^3 - 3^2 + 10(3) - 8$
 $= 27 - 9 + 30 - 8$
 $= -40$

ตอบ

2) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ และ $a = -4$
ดังนั้น $P(a) = a^3 + 3a^2 - 6(a) - 5$
 $= (-4)^3 + 3(-4)^2 - 6(-4) - 5$
 $= -64 + 48 + 24 - 5$
 $= 72 - 69 = 3$

ตอบ

3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 7x + 1$ และ $a = 0$
ดังนั้น $P(a) = 2a^3 - 4a^2 - 7a + 1$
 $= 2(0)^3 - 4(0)^2 - 7(0) + 1$
 $= 0 - 0 - 0 + 1$
 $= 1$

ตอบ

4) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 6$ และ $a = -2$
ดังนั้น $P(a) = 3a^4 + 5a^3 + 9a^2 - 6$
 $= 3(-2)^4 + 5(-2)^3 + 9(-2)^2 - 6$
 $= 3(16) + 5(-8) + 9(4) - 6$
 $= 48 - 40 + 36 - 6$
 $= 8 + 30$
 $= 38$

ตอบ

5) $P(x) = -x^4 - 8x^3 + 4x + 12$ และ $a = 2$
ดังนั้น $P(a) = -a^4 - 8a^3 + 4a + 12$
 $= -2^4 - 8(2)^3 + 4(2) + 12$
 $= -16 - 64 + 8 + 12$
 $= -80 + 20$
 $= -60$

ตอบ

$$\begin{aligned}
 6) \quad P(x) &= -2x^5 - 9x^4 + 19x^3 + 51x^2 - 89x + 30 \quad \text{และ } a = -3 \\
 \text{ดังนั้น } P(a) &= -2a^5 - 9a^4 + 19a^3 + 51a^2 - 89a + 30 \\
 P(-3) &= -2(-3)^5 - 9(-3)^4 + 19(-3)^3 + 51(-3)^2 - 89(-3) + 30 \\
 &= -2(-243) - 9(81) + 19(-27) + 51(9) + 267 + 30 \\
 &= 486 - 729 - 513 + 459 + 267 + 30 \\
 &= 1,242 - 1,242 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ตอบ

2. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ หาเศษเหลือจากการหารพหุนาม ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1) \quad &x^3 + 4x^2 - x - 3 \quad \text{หารด้วย } x - 4 \\
 \text{วิธีทำ} \quad &\text{เมื่อ } x - a = x - 4 \\
 &\text{ดังนั้น } a = 4 \\
 \text{ให้ } P(x) &= x^3 + 4x^2 - x - 3 \\
 P(4) &= 4^3 + 4(4)^2 - 4 - 3 \\
 &= 64 + 64 - 7 \\
 &= 128 - 7 = 121
 \end{aligned}$$

ตอบ

$$\begin{aligned}
 2) \quad &5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \quad \text{หารด้วย } x + 2 \\
 \text{วิธีทำ} \quad &\text{เมื่อ } x - a = x - 2 \\
 &\text{ดังนั้น } a = -2 \\
 \text{ให้ } P(x) &= 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \\
 P(-2) &= 5(-2)^3 - 3(-2)^2 + 7(-2) + 6 \\
 &= 5(-8) - 3(4) + 14 + 6 \\
 &= -40 - 12 + 14 + 6 \\
 &= -60 + 20 = -40
 \end{aligned}$$

ตอบ

$$\begin{aligned}
 3) \quad &2x^4 - 5x^2 + 6x - 14 \quad \text{หารด้วย } x + 3 \\
 \text{วิธีทำ} \quad &\text{เมื่อ } x = x + 3 \\
 &\text{ดังนั้น } a = -3 \\
 \text{ให้ } P(x) &= 2x^4 - 5x^2 + 6x - 14 \\
 P(-3) &= 2(-3)^4 - 5(-3)^2 + 6(-3) - 14 \\
 &= 2(81) - 5(9) - 18 - 14 \\
 &= 162 - 45 - 32 \\
 &= 162 - 77 \\
 &= 85
 \end{aligned}$$

ตอบ

4) $2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ หารด้วย $x+1$

วิธีทำ เมื่อ $x - a = x + 1$

ดังนั้น $a = -1$

ให้ $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^4 - 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + 4 \\ &= 2(1) + 2 - 5 - 3 + 4 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตอบ

5) $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$ หารด้วย $x-1$

วิธีทำ เมื่อ $x - a = x - 1$

ดังนั้น $a = 1$

ให้ $P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$

$$\begin{aligned} P(1) &= -2(1)^5 + 4(1)^4 - 3(1)^3 + 8(1) + 7 \\ &= -2 + 4 - 3 + 8 + 7 \\ &= 14 - 5 \\ &= 14 \end{aligned}$$

ตอบ

6) $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 29x + 2$ หารด้วย $x+2$

วิธีทำ เมื่อ $x - a = x + 2$

ดังนั้น $a = -2$

ให้ $P(x) = 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 29x + 2$

$$\begin{aligned} P(-2) &= 4(-2)^5 + 3(-2)^4 + 2(-2)^3 + 9(-2)^2 - 29(-2) + 2 \\ &= 4(-32) + 3(16) + 2(-8) + 9(4) - 29(-2) + 2 \\ &= -128 + 48 - 16 + 36 + 58 + 2 \\ &= -144 + 144 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตอบ

3. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แสดงผลว่า $x+2$ หาร $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ ลงตัว

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

และ $x - a = x + 2$ ดังนั้น $a = -2$

จะได้ $P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + 12$

$$\begin{aligned} &= -8 - 8 + 4 + 12 \\ &= -16 + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $P(-2) = 0$ ดังนั้น $x+2$ คือตัวประกอบของ $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

ตอบ

4. จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แสดงว่า $x-4$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - 23x^2 + 18x + 40$
วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^4 - 23x^2 + 18x + 40$
 และให้ $x-a = x-4$ ดังนั้น $a = 4$
 แทนค่า $x = a = 4$ ใน $P(x)$ เพื่อพิสูจน์ว่า $P(4) = 0$
 แสดงว่า $x-4$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - 23x^2 + 18x + 40$ จริง ตอบ

5. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

1) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ -12

จำนวนเต็มที่หาร -12 ได้ลงตัว คือ $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12$ และ -12

✓ นิยาม $P(1) = 1^3 - 8(1)^2 + 19(1) - 12$
 $= 1 - 8 + 19 - 12$
 $= 20 - 20$
 $= 0$

ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $x-1$ ไปหาร $P(x)$ ได้ ดังนี้ ;

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x + 12 \\ x-1 \overline{) x^3 - 8x^2 + 19x - 12} \\ \underline{x^3 - 1x^2} \\ -7x^2 + 19x \\ \underline{-7x^2 + 7x} \\ 12x - 12 \\ \underline{12x - 12} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x-1)(x^2 - 7x + 12)$
 $= (x-1)(x-3)(x-4)$

ตอบ

2) $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $P(x)$ คือ 12

จำนวนเต็มที่หาร 12 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 และ -12

แทนค่า $x = 1$ และ -1 ใน $P(x)$ แล้ว $P(x) \neq 0$

✓ แทนค่า $P(-2)$ จะได้ $P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + 12$
 $= -8 - 8 + 4 + 12$
 $= -16 + 16$
 $= 0$

แสดงว่า $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $x + 2$ หาร $P(x)$

จะได้

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 6 \\ x+2 \overline{) x^3 - 2x^2 - 2x + 12} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -4x^2 - 2x \\ \underline{-4x^2 - 8x} \\ 6x + 12 \\ \underline{6x + 12} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 6)$

✓ วิจารณ์ให้ $1x^2 - 4x + 6$ เปรียบเทียบกับรูปแบบของ $ax^2 + bx + c$

แล้ว $a = 1, b = -4, c = 6$

ดังนั้น $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$

ซึ่งไม่เป็นจำนวนจริง
 เพราะ $\sqrt{-8}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

แสดงว่า แยกตัวประกอบของ $x^2 - 4x + 6$ ไม่ได้

และทำให้น $P(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 6)$ เท่านั้น

3) $x^3 - 19x - 30$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 19x - 30$

จำนวนเต็มทีหาร -30 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 15, -15, 30 และ -30

✓ แทนค่า $x = -2$ ใน $P(x)$; $P(x) = x^3 - 19x - 30$

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - 19(-2) - 30 \\ &= -8 + 38 - 30 \\ &= -38 + 38 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $(x + 2)$ ไปตั้งหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 15 \\ x+2 \overline{) x^3 + 0x^2 - 19x - 30} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - 19x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ -15x - 30 \\ \underline{-15x - 30} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 15)$
 $= (x+2)(x+3)(x-5)$

hint : ขอให้สังเกตว่า $x^3 - 19x - 30 = x^3 + 0x^2 - 19x - 30$

เลขที่ตรงช่อง $0x^2$ ขึ้นมา เนื่องจาก เมื่อนำสมการดีกรีต่ำ $(x+2)$ ไปหารสมการดีกรีสูง $(x^3 - 19x - 30)$ จะเกิดพจน์ (Term) ของ x^2 คือ $-2x^2 - 19x$ ดังนั้น การตั้งหารโดยไม่ใส่พจน์ $0x^2$ จึงไม่ถูกต้อง

ตอบ

4) $x^3 + 4x^2 - 11x + 6$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$

จำนวนเต็มทีหาร +6 ได้ลงตัวคือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 และ -6

✓ แทนค่า $x = 1$ ใน $P(x)$ จะได้ $P(1) = 1^3 + 4(1)^2 - 11(1) + 6$

$$\begin{aligned} &= 1 + 4 - 11 + 6 \\ &= 11 - 11 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $x - 1$ ไปตั้งหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 6 \\ x-1 \overline{) x^3 + 4x^2 - 11x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 5x^2 - 11x \\ \underline{5x^2 - 5x} \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } P(x) &= x^3 + 4x^2 - 11x + 6 \\
 &= (x-1)(x^2 + 5x - 6) \\
 &= (x-1)(x+6)(x-1) \\
 \text{หรือ} &= (x-1)(x-1)(x+6) = (x-1)^2(x+6)
 \end{aligned}$$

ตอบ

5) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$

จำนวนเต็มทีหาร -32 ได้ลงตัวคือ 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8, 16, -16, 32 และ -32

✓ แทนค่า $x = -2$ ใน $P(x)$; $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 16(-2) - 32$
 $= -8 + 8 + 32 - 32$
 $= 0$

ดังนั้น $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x + 2$ ไปหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 16 \\
 x+2 \overline{) x^3 + 2x^2 - 16x - 32} \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \\
 -16x - 32 \\
 \underline{-16x - 32} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } P(x) &= x^3 + 2x^2 - 16x - 32 \\
 &= (x+2)(x^2 - 16) \\
 &= (x+2)(x+4)(x-4)
 \end{aligned}$$

ตอบ

6) $x^3 - x^2 - 11x - 4$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^3 - x^2 - 11x - 4$

จำนวนเต็มทีหาร -4 ได้ลงตัวคือ 1, -1, 2, -2, 4 และ -4

✓ แทนค่า $x = 4$ ใน $P(x)$; $P(4) = 4^3 - 4^2 - 11(4) - 4$
 $= 64 - 16 - 44 - 4$
 $= 64 - 64 = 0$

ดังนั้น $x - 4$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x - 4$ ไปหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 1 \\
 x-4 \overline{) x^3 - x^2 - 11x - 4} \\
 \underline{x^3 - 4x^2} \\
 3x^2 - 11x - 4 \\
 \underline{3x^2 - 12x} \\
 x - 4 \\
 \underline{x - 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } P(x) &= x^3 - x^2 - 11x - 4 \\
 &= (x-4)(x^2 + 3x + 1)
 \end{aligned}$$

ตอบ

note : เนื่องจากไม่สามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 + 3x + 1$ ให้อยู่ในรูป $x - a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มได้ จึงต้องตอบตามข้างต้น

$$7) \quad x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$$

วิธีทำ

กำหนดให้ $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$

จำนวนเต็มที่สามารถหาร 36 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36 และ -36

✓ แทนค่า $x = 2$ ใน $P(x)$; $P(2) = 2^4 + 2(2)^3 - 11(2)^2 - 12(2) + 36$
 $= 16 + 16 - 44 - 24 + 36$
 $= 68 - 68$
 $= 0$

ดังนั้น $x - 2$ เป็นหนึ่งในตัวประกอบของ $P(x)$

ถ้า $(x-2)$ หาร $P(x)$ ได้ ;

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 18 \\ x-2 \overline{) x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \\ 4x^3 - 11x^2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -3x^2 - 12x \\ \underline{-3x^2 + 6x} \\ -18x + 36 \\ \underline{-18x + 36} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x-2)(x^3 + 4x^2 - 3x - 18)$

ให้ $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

จำนวนเต็มที่สามารถหาร -18 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18 และ -18

✓ แทนค่า $x = -3$ ใน $Q(x)$; $Q(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 3(-3) - 18$
 $= -27 + 36 + 9 - 18$
 $= 18 - 18 = 0$

ดังนั้น $x - (-3) = x + 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

ถ้า $x + 3$ หาร $Q(x)$ ได้ ;

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x+3 \overline{) x^3 + 4x^2 - 3x - 18} \\ \underline{x^3 + 3x^2} \\ x^2 - 3x \\ \underline{x^2 + 3x} \\ -6x - 18 \\ \underline{-6x - 18} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $Q(x) = (x+3)(x^2 + x - 6) = (x+3)(x+3)(x-2)$

8) $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

วิธีทำ

กำหนดให้ $P(x) = x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

จำนวนเต็มที่สามารถหาร -180 ได้ลงตัวคือ $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \dots, 180, \text{ และ } -180$

✓ แทนค่า $x = 3$ ใน $P(x)$;

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^4 - 5(3)^3 - 17(3)^2 + 129(3) - 180 \\ &= 81 - 135 - 153 + 387 - 180 \\ &= \frac{81 + 387}{468} - \frac{135 + 153 + 180}{468} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 3$ หรือ $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

✓ แทนค่า $x = -5$ ใน $P(x)$ เช่นกัน

$$\begin{aligned} P(-5) &= (-5)^4 - 5(-5)^3 - 17(-5)^2 + 129(-5) - 180 \\ &= \frac{625 + 625}{1,250} - \frac{425 - 645 - 180}{1,250} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - (-5) = x + 5$ ก็เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ เช่นกัน

$$\begin{aligned} \text{โดย } (x+5)(x-3) &= x^2 + 5x - 3x - 15 \\ &= x^2 + 2x - 15 \end{aligned}$$

นำ $x^2 + 2x - 15$ ไปหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x + 12 \\ x^2 + 2x - 15 \overline{) x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180} \\ \underline{x^2 + 2x - 15x^2} \\ -7x^3 - 2x^2 + 129x \\ \underline{-7x^3 - 14x^2 + 105x} \\ 12x^2 + 24x - 180 \\ \underline{12x^2 + 24x - 180} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(x) &= (x^2 + 2x - 15)(x^2 - 7x + 12) \\ &= (x+5)(x-3)(x-3)(x-4) \\ &= (x-3)^2(x-4)(x+5) \end{aligned}$$

9) $x^4 - 34x^2 + 225$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^4 - 34x^2 + 225$

จำนวนเต็มที่สามารถหาร 225 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 3, -3, 5, -5, ..., 225 และ -225

✓ แทนค่า $x = 3$ ใน $P(x)$; $P(3) = 3^4 - 34(3)^2 + 225$
 $= 81 - 34(9) + 225$
 $= 306 - 306 = 0$

ดังนั้น $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง ของ $P(x)$

✓ แทนค่า $x = -3$ ใน $P(x)$; เช่นกัน

$P(-3) = (-3)^4 - 34(-3)^2 + 225$
 $= 81 - 34(9) + 225$
 $= 306 - 306 = 0$

ดังนั้น $x - (-3) = x + 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง ของ $P(x)$ เช่นกัน

แล้ว $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

ดังนั้น $x^2 - 9$ ก็ต้องเป็นตัวประกอบของ $P(x)$ เช่นกัน

ให้ $x^2 - 9$ หาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r} x^2 - 25 \\ x^2 - 9 \overline{) x^4 + 0x^3 - 34x^2 + 0x^1 + 225} \\ \underline{x^4 - 9x^2} \\ -25x^2 \\ \underline{-25x^2 } \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 25) = (x^2 - 3^2)(x^2 - 5^2)$
 $= (x+3)(x-3)(x+5)(x-5)$

ตอบ

10) $x^5 - 23x^3 - 6x^2 + 112x + 96$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(x) = x^5 - 23x^3 - 6x^2 + 112x + 96$

จำนวนเต็มที่สามารถหาร 96 ได้ลงตัว คือ 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ..., 96 และ -96

✓ แทนค่า $x = -1$ ใน $P(x)$; $P(-1) = (-1)^5 - 23(-1)^3 - 6(-1)^2 + 112(-1) + 96$
 $= -1 - 23(-1) - 6(1) - 112 + 96$
 $= -1 + 23 - 6 - 112 + 96$
 $= -119 + 119 = 0$

ดังนั้น $x - (-1) = x + 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง ของ $P(x)$

✓ แทนค่า $x = -2$ ใน $P(x)$; $P(-2) = (-2)^5 - 23(-2)^3 - 6(-2)^2 + 112(-2) + 96$
 $= -32 - 23(-8) - 6(4) - 224 + 96$
 $= -32 + 184 - 24 - 224 + 96$
 $= -280 + 280 = 0$

ดังนั้น $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ เช่นกัน

แล้ว $(x+1)(x+2) = x^2+x+2x+2 = x^2+3x+2$

ดังนั้น x^2+3x+2 ก็ต้องเป็นตัวประกอบของ $P(x)$ เช่นกัน

ถ้า x^2+3x+2 ไปหาร $P(x)$;

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 16x + 48 \\ x^2 + 3x + 2 \overline{) x^5 + 0x^4 - 23x^3 - 6x^2 + 112x + 96} \\ \underline{x^5 + 3x^4 + 2x^3} \\ -3x^4 - 25x^3 - 6x^2 \\ \underline{-3x^4 - 9x^3 - 6x^2} \\ -16x^3 + 0x^2 + 112x \\ \underline{-16x^3 - 48x^2 - 32x} \\ 48x^2 + 144x + 96 \\ \underline{48x^2 + 144x + 96} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $P(x) = (x^2+3x+2)(x^3-3x^2-16x+48)$

ให้ $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 16x + 48$

✓ แทนค่า $x=3$ ใน $Q(x)$; $Q(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 16(3) + 48$
 $= 27 - 27 - 48 + 48$
 $= 0$

ดังนั้น $x-3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

✓ แทนค่า $x=4$ ใน $Q(x)$; $Q(4) = 4^3 - 3(4)^2 - 16(4) + 48$
 $= 64 - 48 - 64 + 48$
 $= 0$

ดังนั้น $x-4$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$ เช่นกัน

และ $(x-3)(x-4) = x^2 - 3x - 4x + 12 = x^2 - 7x + 12$

ดังนั้น $x^2 - 7x + 12$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$

ถ้า $x^2 - 7x + 12$ ไปหาร $Q(x)$;

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ x^2 - 7x + 12 \overline{) x^3 - 3x^2 - 16x + 48} \\ \underline{x^3 - 7x^2 + 12x} \\ 4x^2 - 28x + 48 \\ \underline{4x^2 - 28x + 48} \\ 0 \end{array}$$

ดังนั้น $Q(x) = (x^2 - 7x + 12)(x+4)$

และทำให้ $P(x) = (x^2+3x+2)(x^2-7x+12)(x+4)$
 $= (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)(x+4)$

คำถามหน้า 61 ค่า k เป็นเท่าใด ?

จงหาค่า k ที่เป็นไปได้ ตามเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x-5$ หาร $x^3-3x^2+kx-20$ ลงตัว

วิธีทำ จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อ $x-a = x-5$
ดังนั้น $a = 5$

และทำให้ $P(5) = 5^3 - 3(5)^2 + k(5) - 20 = 0$
 $0 = 125 - 75 + 5k - 20$
 $0 = 5k + 30$
 $k = -\frac{30}{5} = -6$

ตอบ

2. $x+7$ เป็นตัวประกอบของ $x^4+9x^3+5x^2-kx+28$

วิธีทำ เมื่อ $x+7$ เป็นตัวประกอบของ $x^4+9x^3+5x^2-kx+28$
ดังนั้น $P(-7)$ ต้องมีค่า $= 0$

ให้ $P(-7) = (-7)^4 + 9(-7)^3 + 5(-7)^2 - k(-7) + 28$
 $0 = 2,401 - 3,087 + 245 + 7k + 28$
 $3,671 - 3,087 + 7k = 0$
 $-416 + 7k = 0$
 $k = \frac{416}{7}$

ตอบ

3. $x-6$ หาร $x^3-8x^2+19x+k$ แล้ว ได้เศษเหลือเป็น 15

วิธีทำ จากข้อกำหนดของโจทก์ ถ้า $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x + k$ แล้ว

$P(6)$ ต้อง $= 15$

ดังนั้น $15 = P(6) = 6^3 - 8(6)^2 + 19(6) + k$
 $15 = 216 - 288 + 114 + k$
 $-k = 330 - 288 - 15$
 $-k = 330 - 303 = 27$
 $\therefore k = -27$

ตอบ

4. $x+3$ หาร x^3+x^2-4x-k แล้ว ได้เศษเหลือเป็น 0

วิธีทำ จากข้อกำหนดของโจทก์ ถ้า $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - k$ แล้ว

$P(-3)$ ต้อง $= 0$

ดังนั้น $0 = P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 4(-3) - k$
 $0 = -27 + 9 + 12 - k$
 $0 = -k - 6$
 $k = -6$

ตอบ