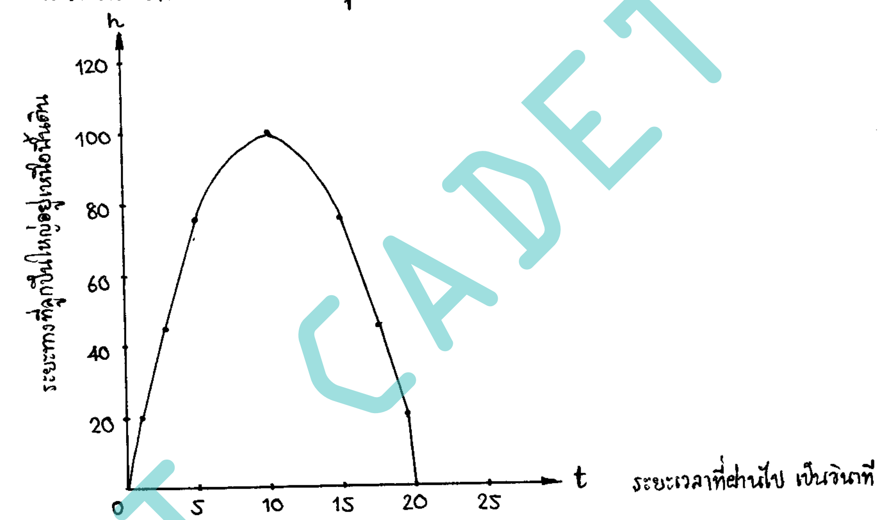
บทที่ 4
พาราโบลา
(Parabola)

4.1 สมการพาราโบลา

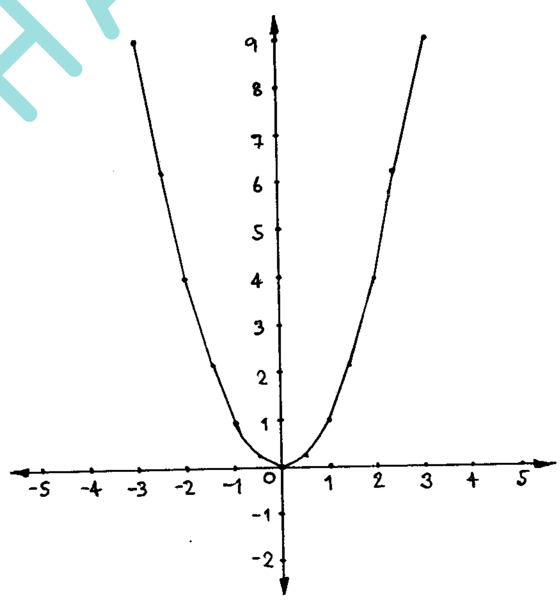
กาลิเลโอ (Galileo ค.ศ. 1564 - 1642) นักวิทยาศาสตร์ที่มีชื่อเสียงของโลก พบว่า "เมื่อเราโยนวัตถุขึ้นไปในอากาศ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ในทางคณิตศาสตร์แล้ว เรียกเส้นโค้งลักษณะนี้ว่า พาราโบลา"

สังเกต ความสัมพันธ์ระหว่าง เวลาที่ผ่านไป เป็นวินาที (t) หลังการยิงปืนใหญ่ กับระยะทางที่ลูกปืนใหญ่ อยู่เหนือจากพื้นดิน เป็นเมตร (h) ที่เป็นไปตามสมการ $h = 20t - t^2$ และเขียน กราฟของสมการได้ ดังรูป



ตัวอย่างนี้ เป็นตัวอย่างของ พาราโบลา "คว่ำ"

หรือ พิจารณากราฟของสมการ $y = x^2$ ดังนี้



ตัวอย่างนี้ เป็นตัวอย่างของ พาราโบลา "หงาย"

สมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปร
a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
คือ สมการของพาราโบลา

ถ้าให้ $a = 0$ แล้ว
สมการ $y = ax^2 + bx + c$ จะกลายเป็น

$$y = \cancel{0x^2}^{\,0} + bx + c$$
$$= 0 + bx + c$$
$$y = bx + c$$ จะกลายเป็น "สมการเส้นตรง"
เพราะรูปแบบ x^2 หายไป นั่นเอง

หน้า 96 "บอกได้หรือไม่"

1. เมื่อเปรียบเทียบ สมการของพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ กับสมการในรูปทั่วไป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว แล้ว a, b และ c ในแต่ละสมการ เป็นเท่าไร

★ โจทย์ ต้องการให้ เรา พิจารณาสมการ & ดูให้เห็นว่า a, b และ c เป็นอะไร ?

1) $y = x^2 + x - 6$
$= 1x^2 + 1x - 6$
$\therefore a = 1, b = 1, c = -6$

2) $y = -2x^2$
$= -2x^2 + 0x + 0$
$\therefore a = -2, b = 0, c = 0$

3) $y = 9 + x^2$
$= 1x^2 + 0x + 9$
$\therefore a = 1, b = 0, c = 9$

4) $2y = 4x - x^2$
$= -1x^2 + 4x + 0$
$\therefore a = -1, b = 4, c = 0$

5) $y = (x+3)^2$
$= x^2 + 2(x)(3) + 3^2$
$= 1x^2 + 6x + 9$
$\therefore a = 1, b = 6, c = 9$

6) $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

$= (-1)\left(x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$= (-1)\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$

$= -1x^2 - 1x - \frac{1}{4}$

$\therefore\ a = -1\ ,\ b = -1\ ,\ c = -\frac{1}{4}$

2. สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการพาราโบลา หรือไม่ ? เพราะเหตุใด ?

ตัวอย่างเช่น $y = x^2 - 5$ เป็นสมการพาราโบลา เพราะสามารถจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ โดยที่ $a = 1$, $b = 0$ และ $c = -5$

$y = 0$ ไม่เป็นสมการพาราโบลา เพราะไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ โดยที่ $a \neq 0$

1) $y = x^2$ เป็นสมการพาราโบลา

2) $y = 3x - 5$ ไม่เป็น สมการพาราโบลา เพราะไม่มีรูป x^2

3) $y = x^2 + 2x - 1$ เป็น สมการพาราโบลา

4) $y = (x+1)^2$

$= x^2 + 2x + 1$ เป็น สมการพาราโบลา

5) $y = -6 - 2x - x^2$

$= -x^2 - 2x - 6$ เป็น สมการพาราโบลา แม้ว่า $a = -1$ แต่ a ก็ $\neq 0$

6) $y = 6$ ไม่เป็น สมการพาราโบลา เพราะไม่มีรูปแบบของ x^2

★ อยากให้ทุกคน มองภาพรวมให้ออกว่า

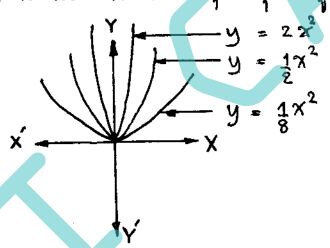
สมการพาราโบลา อยู่ในรูป $y = ax^2+bx+c$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปร
มี a, b และ c เป็นค่าคงตัว (constant value) โดยที่ $a \neq 0$
เพื่อป้องกันไม่ให้เกิด $0x^2$ เพราะ $0x^2 = 0$ ทำให้สมการไม่มีเทอม x^2
ซึ่ง ทำให้ไม่เป็นสมการพาราโบลา นั่นเอง

ทั้งนี้ สมการ $y = ax^2+bx+c$ สามารถเกิดรูปแบบต่างๆได้ ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $b = 0$ และ $c = 0$
ดังนั้น $y = ax^2 + 0x + 0$
หรือ $y = ax^2$ เท่านั้น

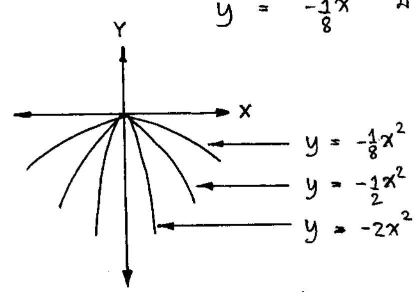
- ถ้า $a > 0$ เช่น $y = 2x^2$ มี $a = 2$ ——— (1)
  $y = \frac{1}{2}x^2$ มี $a = \frac{1}{2}$ ——— (2)
  $y = \frac{1}{8}x^2$ มี $a = \frac{1}{8}$ ——— (3)

จะเกิด พาราโบลาหงาย มีจุดต่ำสุด อยู่ที่พิกัด $(0,0)$



<u>สังเกตว่า</u> ค่า a ยิ่งมาก กราฟ ยิ่ง แคบ
ค่า a ยิ่งน้อย กราฟ ยิ่ง กว้าง
ค่า a ยิ่งเข้าใกล้ 0 กราฟยิ่งบาน & กว้างออกมาก ๆ
น้อง ๆ จะได้ ข้อสังเกตว่า กราฟจะกว้าง หรือ แคบ ดูได้จากค่า a ของ x^2 นั่นเอง

- ถ้า $a = 0$ อันนี้ <u>ผิดข้อห้ามครับ</u> * เพราะถ้า $a = 0$ จะไม่เกิดกราฟพาราโบลา
- ถ้า $a < 0$ เช่น $y = -2x^2$ มี $a = -2$
  $y = -\frac{1}{2}x^2$ มี $a = -\frac{1}{2}$
  $y = -\frac{1}{8}x^2$ มี $a = -\frac{1}{8}$



<u>สังเกตว่า</u> กรณี $a < 0$ ค่า a ยิ่งมาก กราฟยิ่งกว้าง
ค่า a ยิ่งเข้าใกล้ 0 กราฟยิ่งกว้าง
ค่า a ยิ่งน้อย กราฟยิ่งแคบ

เพื่อป้องกันความสับสน การดูความ "กว้าง" หรือ "แคบ" ของกราฟ
เราจึงใช้ "ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)" มาช่วยดังนี้

1. พิจารณา พาราโบลา จากสมการ $y = ax^2$

   เช่น $y = 3x^2$ มี $a = 3$

   $y = -4x^2$ มี $a = -4$

   $y = -\frac{1}{8}x^2$ มี $a = -\frac{1}{8}$

2. ใส่ค่าสัมบูรณ์ให้กับค่า a ซึ่ง $|3| = 3$, $|-4| = 4$ และ $|-\frac{1}{8}| = \frac{1}{8}$

3. ค่าสัมบูรณ์ ยิ่งมาก กราฟยิ่งแคบ

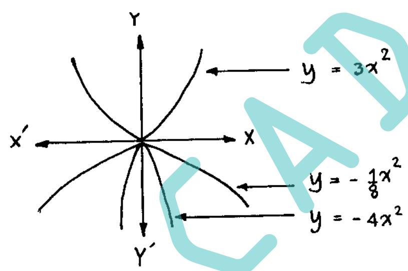
   ค่าสัมบูรณ์ ยิ่งน้อย กราฟ ยิ่ง กว้าง

   ค่าน้อย คือใกล้เคียงกับศูนย์ ค่ามาก คือค่าห่างจากศูนย์เยอะๆ

   ดังนั้น กราฟ $y = -\frac{1}{8}x^2$ กว้างกว่า $y = 3x^2$

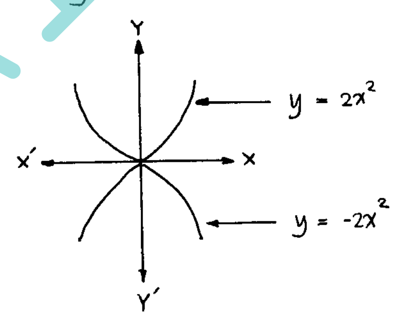
   และ กราฟ $y = 3x^2$ กว้างกว่า $y = -4x^2$

ดังนี้



และ สังเกตว่า $y = ax^2$ กับ $y = -ax^2$

เช่น $y = 2x^2$ และ $y = -2x^2$ เป็นภาพสะท้อนซึ่งกันและกัน เมื่อพับกราฟตามแกน x กราฟทั้งสองจะทับกันสนิทพอดี ในกรณีนี้ แกน x เป็นแกนสะท้อน



สรุป กรณีที่ 1 $y = ax^2$

1) จุดยอด อยู่ที่พิกัด $(0,0)$

   ถ้า $a > 0$ กราฟหงาย เกิดจุดต่ำสุด ที่พิกัด $(0,0)$

   ถ้า $a < 0$ กราฟคว่ำ เกิดจุดสูงสุด ที่พิกัด $(0,0)$

2) การดูความกว้าง / แคบ ของกราฟ ใส่ absolute ให้ค่า a

   ถ้า $|a|$ ยิ่งมาก กราฟยิ่งแคบ

   ถ้า $|a|$ ยิ่งน้อย กราฟ ยิ่งกว้าง

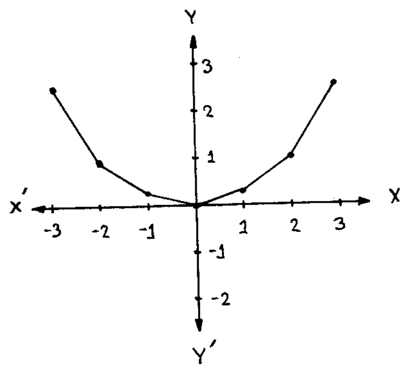
3) กราฟ $y = ax^2$ และ $y = -ax^2$ นั้นสะท้อนซึ่งกันและกัน

แบบฝึกหัด 4.2

1. ในตารางแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้นักเรียนเติมค่า y ตามค่า x ที่กำหนด แล้วเขียนกราฟ
(x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม)

1)

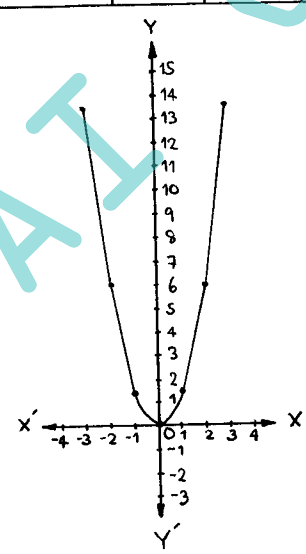
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{4}x^2$	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$



ตอบ

2)

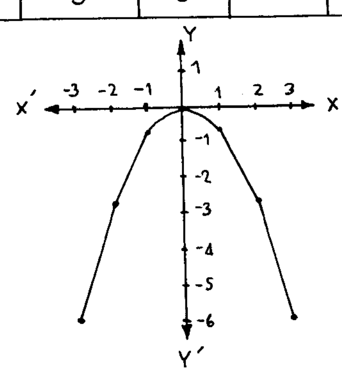
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{3}{2}x^2$	$\frac{27}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$



ตอบ

3)

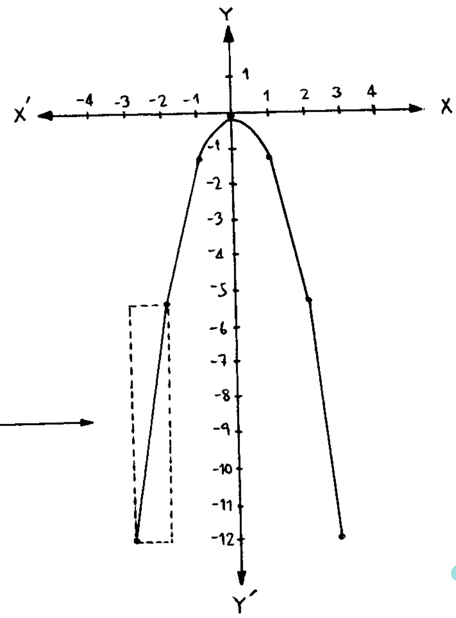
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{2}{3}x^2$	-6	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-6



ตอบ

4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -\frac{4}{3}x^2$	-12	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{3}$	-12

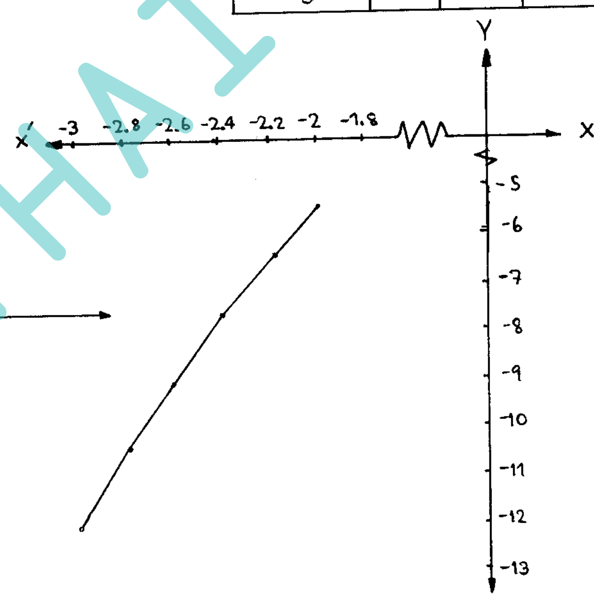


ตอบ

<u>note</u> : สังเกตว่า การ plot พิกัด อาจไม่เป็นเส้นโค้ง เพราะจากพิกัดที่โจทย์กำหนดให้นั้น ยังไม่ละเอียดเพียงพอ

ลองพิจารณาสมการใน 4) $y = -\frac{4}{3}x^2$

x	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2
$y = -\frac{4}{3}x^2$	-12	-10.45	-9.01	-7.68	-6.45	-5.33



<u>จะเห็นว่า</u> ได้กราฟที่ละเอียดยิ่งขึ้น

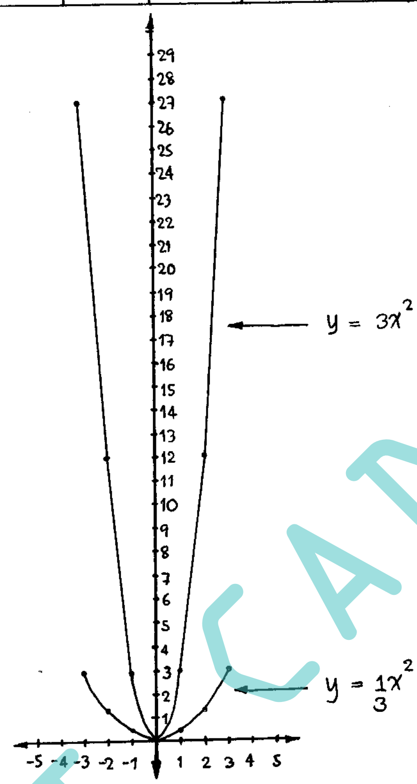
เพราะ เส้นตรง เกิดจากการรวมกันของจุด

และ เส้นโค้ง เกิดจากการรวมกันของเส้นตรง

จริงไหมครับ ? ☺

2. จงเขียนกราฟของสมการ $y = 3x^2$ และ $y = \frac{1}{3}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = 3x^2$	27	12	3	0	3	12	27
$y_2 = \frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3



แล้ว ตอบคำถามต่อไปนี้

1) กราฟทั้งสองเส้น มีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

<u>ตอบ</u> แกน Y เพราะถ้าพับกราฟตามแกน Y กราฟจะทับกันสนิทพอดี

2) จุดต่ำสุดของกราฟทั้งสอง เป็นจุดใด

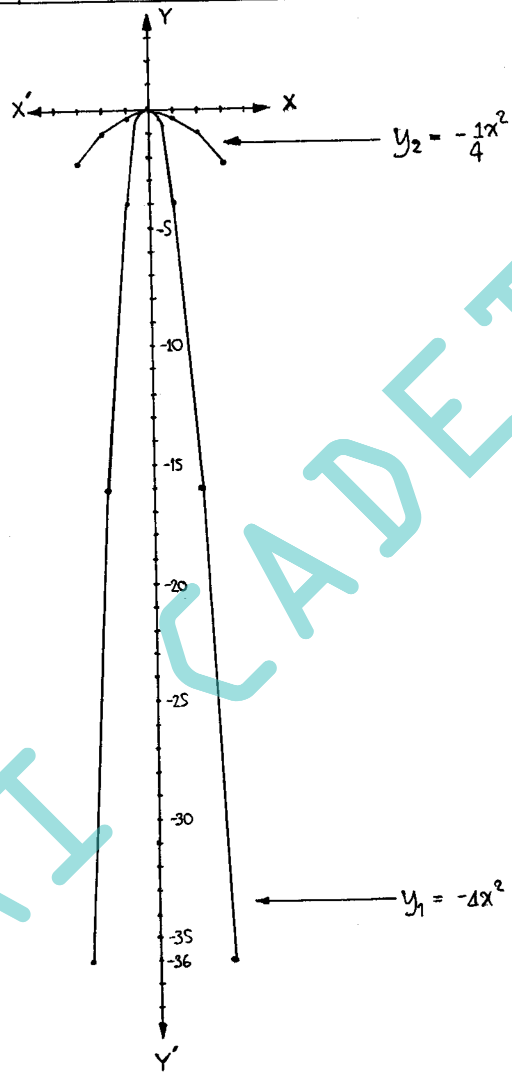
<u>ตอบ</u> ที่พิกัด (0, 0)

3) ค่าต่ำสุดของ y ในสมการทั้งสองเป็นเท่าใด

<u>ตอบ</u> ค่า = 0

3. จงเขียนกราฟของสมการ $y = -4x^2$ และ $y = -\frac{1}{4}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = -4x^2$	-36	-16	-4	0	-4	-16	-36
$y_2 = -\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$



1) กราฟทั้งสองมีเส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

<u>ตอบ</u> แกน Y เพราะหากพับ ซ้าย / ขวา โดยมีแกน Y อยู่ตรงกลางแล้ว กราฟจะทับกันสนิทพอดี

2) จุดสูงสุดของกราฟทั้งสองเป็นจุดใด

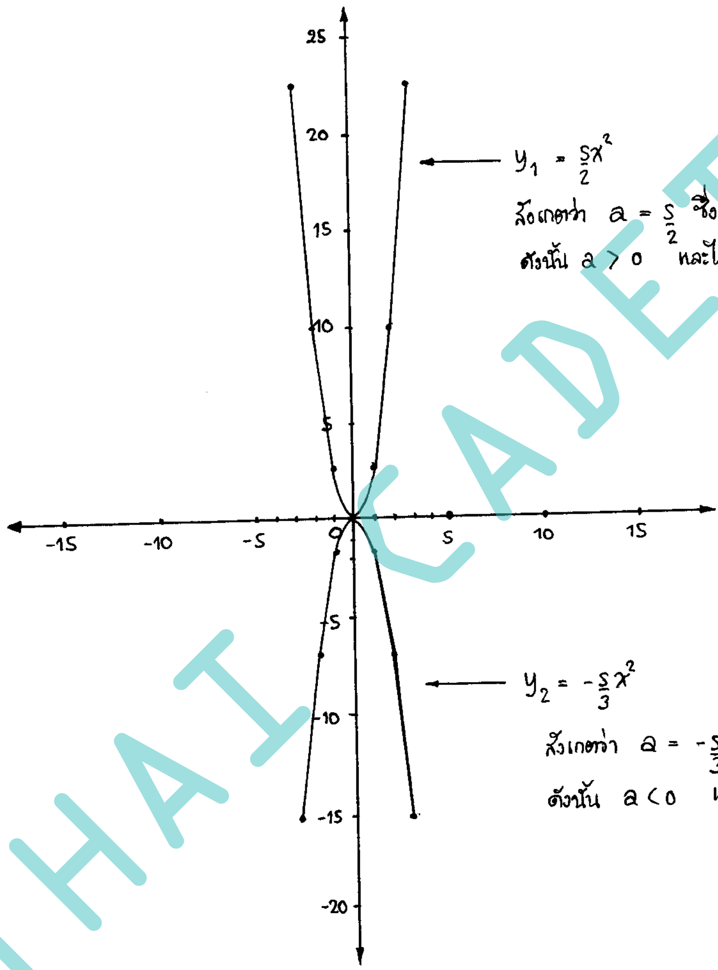
<u>ตอบ</u> พิกัด $(0,0)$

3) ค่าสูงสุดของ y ในสมการทั้งสอง เป็นเท่าใด

<u>ตอบ</u> $y = 0$

4. จงเขียนกราฟของสมการ $y = \frac{5}{2}x^2$ และ $y = -\frac{5}{3}x^2$ โดยใช้แกนคู่เดียวกัน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = \frac{5}{2}x^2$	$\frac{45}{2}$	10	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	10	$\frac{45}{2}$
$y_2 = -\frac{5}{3}x^2$	-15	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{20}{3}$	-15



$y_1 = \frac{5}{2}x^2$

สังเกตว่า $a = \frac{5}{2}$ ซึ่ง $\frac{5}{2} > 0$

ดังนั้น $a > 0$ และได้กราฟหงาย มีจุดต่ำสุด

$y_2 = -\frac{5}{3}x^2$

สังเกตว่า $a = -\frac{5}{3}$ ซึ่ง $-\frac{5}{3} < 0$

ดังนั้น $a < 0$ และได้กราฟคว่ำ มีจุดสูงสุด

1) กราฟทั้งสอง มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

2) จุดต่ำสุดของกราฟ $y_1 = \frac{5}{2}x^2$ คือจุด $(0, 0)$
และจุดสูงสุดของกราฟ $y_2 = -\frac{5}{3}x^2$ ก็คือจุด $(0, 0)$ เช่นกัน

3) ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของ y จากกราฟทั้งสอง คือ $y = 0$

ตอบ

5. จงพิจารณาสมการ $y_1 = 2x^2$, $y_2 = 4x^2$ และ $y_3 = 5x^2$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ

1) กราฟของสมการทั้งสาม เป็นพาราโบลา "หงาย" มีจุดต่ำสุด ที่พิกัด (0,0)

$$\text{เพราะ}\ \left.\begin{array}{l} y_1\ \text{มี}\ a = 2 \\ y_2\ \text{มี}\ a = 4 \\ y_3\ \text{มี}\ a = 5 \end{array}\right\}$$

ซึ่ง a ทั้งหมด > 0
ดังนั้น ได้กราฟพาราโบลา "หงาย"

2) กราฟทั้งสาม มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

3) กราฟทั้งสาม มี พิกัด (0,0) เป็นจุดต่ำสุด

<u>ตอบ</u>

6. จงพิจารณาสมการ $y_1 = -3x^2$, $y_2 = -6x^2$ และ $y_3 = -7x^2$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ

1) กราฟของสมการทั้งสามเป็นพาราโบลา "คว่ำ" มีจุดสูงสุดที่พิกัด (0,0)

$$\text{เพราะ}\ \left.\begin{array}{l} y_1\ \text{มี}\ a = -3 \\ y_2\ \text{มี}\ a = -6 \\ y_3\ \text{มี}\ a = -7 \end{array}\right\}$$

ซึ่ง a ทั้งหมด < 0
ดังนั้น ได้กราฟ พาราโบลา "คว่ำ"

2) กราฟทั้งสามมี แกน Y เป็นแกนสมมาตร

3) กราฟทั้งสามมี พิกัด (0,0) เป็นจุดสูงสุด

<u>ตอบ</u>

4.3 พาราโบลา ที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

จากหัวข้อ 4.2 ซึ่งกล่าวถึงพาราโบลา ที่ถูกกำหนดด้วยสมการ $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0, b = 0$ และ $c = 0$ มาแล้ว นั้น
ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงพาราโบลา ในรูป แบบของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

ค่า k ไม่ใช่ตัวแปรใหม่ จริงๆ แล้ว $y = ax^2 + k$ ก็คือ $y = ax^2 + c$ เมื่อ $a \neq 0, b = 0$ และ $c \neq 0$
ซึ่งควรถูกเขียน อยู่ในรูป $y = ax^2 + c$
แต่ เรากำหนดใหม่ ให้ $c \leftrightarrow k$ จึงทำให้ $y = ax^2 + k$

★ ทำไมต้อง k ?

<u>ตอบ</u> เพราะ โดยทั่วไปแล้ว (h, k) คือพิกัดของจุดยอด ของ พาราโบลา
h จะอยู่กับ ตัวแปร x
k จะอยู่กับตัวแปร y

- สำหรับ $y = ax^2$ สังเกตว่า $h = 0$ และ $k = 0$
  ดังนั้น จุดยอดของ $y = ax^2$ จึงอยู่ที่พิกัด $(0, 0)$
- สำหรับ $y = ax^2 + c$ หรือ $y = ax^2 + k$
  สังเกตว่า $h = 0$ และ $c = k$
  ดังนั้น จุดยอดของ $y = ax^2 + k$ จึงอยู่ที่พิกัด $(0, k)$

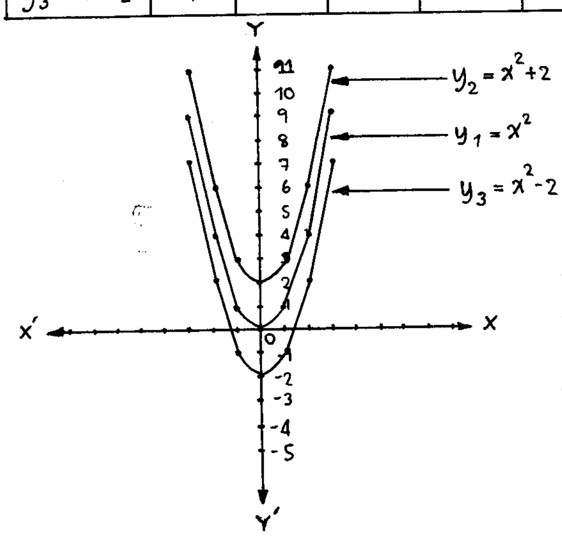
เช่น $y = 2x^2 + \underline{1}$ มีจุดยอดที่พิกัด $(0, 1)$
$y = -3x^2 - \underline{4}$ มีจุดยอดที่พิกัด $(0, -4)$ เป็นต้น

★ อย่าลืมว่า ถ้า $a > 0$ กราฟจะหงาย
ถ้า $a < 0$ กราฟจะคว่ำ

และเมื่อ มาสอดคล้อง กับ จุดยอดที่พิกัด $(0, k)$ แล้ว
ทำให้ "<u>จุดยอดของกราฟ มีการขยับขึ้น / ลง บนแกน Y นั่นเอง</u>"

<u>กรณีที่ 1</u> $a > 0$ พิจารณาสมการ $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + 2$ และ $y_3 = x^2 - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y_2 = x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11
$y_3 = x^2 - 2$	7	2	-1	-2	-1	2	7



<u>สังเกตว่า</u>

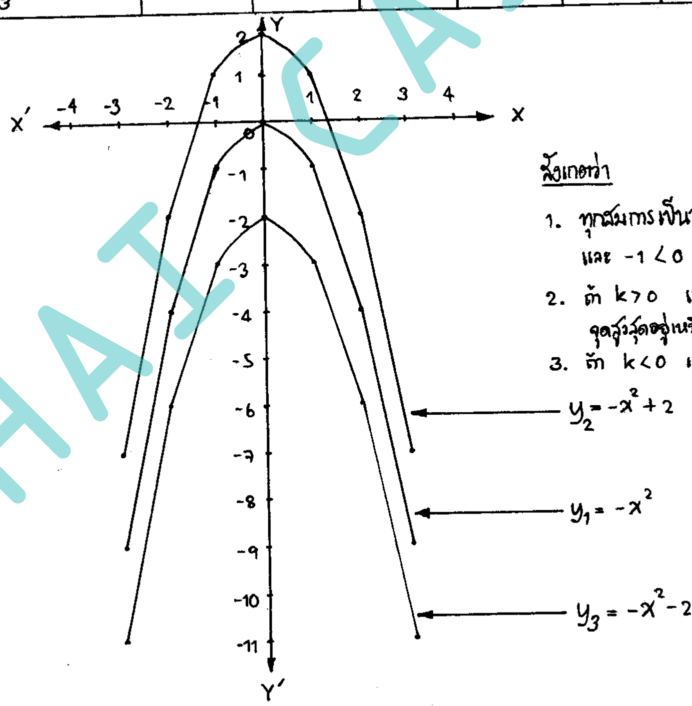
1. ทุกสมการเป็นพาราโบลาหงาย เพราะ $a = 1$ & $1 > 0$
   มีจุดต่ำสุดที่พิกัด $(0, k)$
2. ถ้า $k > 0$ เช่น $y_2 = x^2 + 2$
   จุดต่ำสุด อยู่เหนือ แกน X
3. ถ้า $k < 0$ เช่น $y_3 = x^2 - 2$
   จุดต่ำสุด อยู่ต่ำกว่าแกน X

จุดสังเกตของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a > 0$

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. พิกัด $(0, k)$ เป็นจุดยอดของกราฟ กรณีนี้ $a > 0$ ทำให้ $(0, k)$ เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ
   จุดนี้ อยู่เหนือแกน X ถ้า $k > 0$
   อยู่ใต้แกน X ถ้า $k < 0$
3. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นกราฟที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = ax^2$
   ตามแนวแกน Y ขึ้นไปเหนือแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และ
   ลงมาใต้แกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k < 0$

กรณีที่ 2 $a < 0$ พิจารณาสมการ $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 - 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$y_2 = -x^2 + 2$	-7	-2	1	2	1	-2	-3
$y_3 = -x^2 - 2$	-11	-6	-3	-2	-3	-6	-11



สังเกตว่า

1. ทุกสมการเป็นพาราโบลาคว่ำ เพราะ $a = -1$ และ $-1 < 0$ มีจุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด $(0, k)$
2. ถ้า $k > 0$ เช่น $y_2 = -x^2 + 2$ จุดสูงสุดอยู่เหนือแกน x
3. ถ้า $k < 0$ เช่น $y_3 = -x^2 - 2$ จุดสูงสุดอยู่ใต้แกน X

จุดสังเกตของ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $a < 0$

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ มีแกน Y เป็นแกนสมมาตร
2. พิกัด $(0, k)$ เป็นจุดยอดของกราฟ กรณีนี้ $a < 0$ ทำให้ $(0, k)$ เป็นจุดสูงสุดของกราฟ
   จุดนี้ อยู่เหนือแกน X ถ้า $k > 0$
   อยู่ใต้แกน X ถ้า $k < 0$
3. กราฟของสมการ $y = ax^2 + k$ เป็นกราฟที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = ax^2$
   ตามแนวแกน Y ขึ้นไปตามแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และ
   ลงมาใต้แกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k < 0$

ซึ่ง เราสามารถนำความรู้ เกี่ยวกับกราฟของพาราโบลา $y = ax^2 + k$ เมื่อ $k \neq 0$ มาสรุป เป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่า เป็นสมการพาราโบลาหงาย หรือพาราโบลาคว่ำ โดยดูจากค่า a ในสมการ $y = ax^2 + k$ เมื่อ $k \neq 0$ ซึ่ง จะเป็นพาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ และ จะเป็นพาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$

เช่น
$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}x^2 + 2 \\ y &= 4x^2 - 1 \end{aligned}\right\} \text{ เป็น พาราโบลา หงาย เพราะ } a > 0$$

$$\left.\begin{aligned} y &= -\tfrac{1}{2}x^2 + 2 \\ y &= -\tfrac{1}{2}x^2 - 2 \end{aligned}\right\} \text{ เป็น พาราโบลา คว่ำ เพราะ } a < 0$$

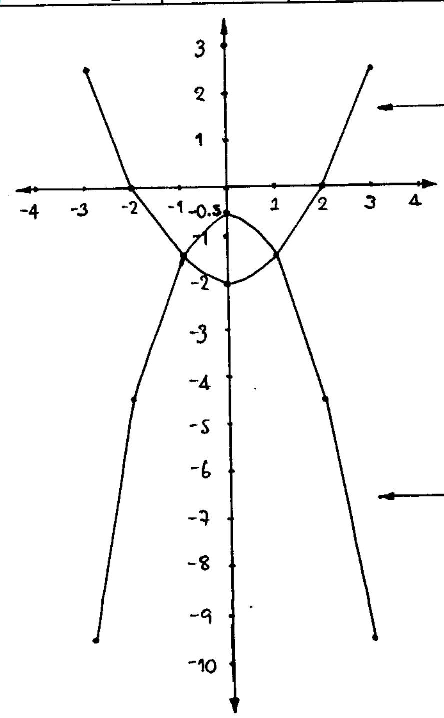
2. จุดต่ำสุด หรือจุดสูงสุดของกราฟ อยู่ที่พิกัด $(0, k)$

เช่น
$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 2$ มีจุดต่ำสุด ที่ $(0, 2)$
$y_2 = 2x^2 - 3$ มีจุดต่ำสุด ที่ $(0, -3)$
$y_3 = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ มีจุดสูงสุด ที่ $(0, -2)$
$y_4 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ มีจุดสูงสุด ที่ $(0, -\frac{1}{2})$

__ตัวอย่างที่ 1__ จงเขียนกราฟของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ และ $y = -1x^2 - \frac{1}{2}$ บนแกน XY เดียวกัน

__วิธีทำ__ หาตำแหน่งของพิกัด (x, y) จากสมการทั้งสองได้ ดังนี้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2$	2.5	0	-1.5	-2	-1.5	0	2.5
$y_2 = -1x^2 - \frac{1}{2}$	-9.5	-4.5	-1.5	-0.5	-1.5	-4.5	-9.5



$y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2$
$a = \frac{1}{2}$ ซึ่ง $\frac{1}{2} > 0$ ได้กราฟหงาย มีจุดต่ำสุด
จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(0, k) = (0, -2)$

$y_2 = -1x^2 - \frac{1}{2}$
$a = -1$ ซึ่ง $-1 < 0$ ได้กราฟคว่ำ มีจุดสูงสุด
จุดสูงสุด อยู่ที่พิกัด $(0, k) = (0, -\frac{1}{2})$

ตอบ

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

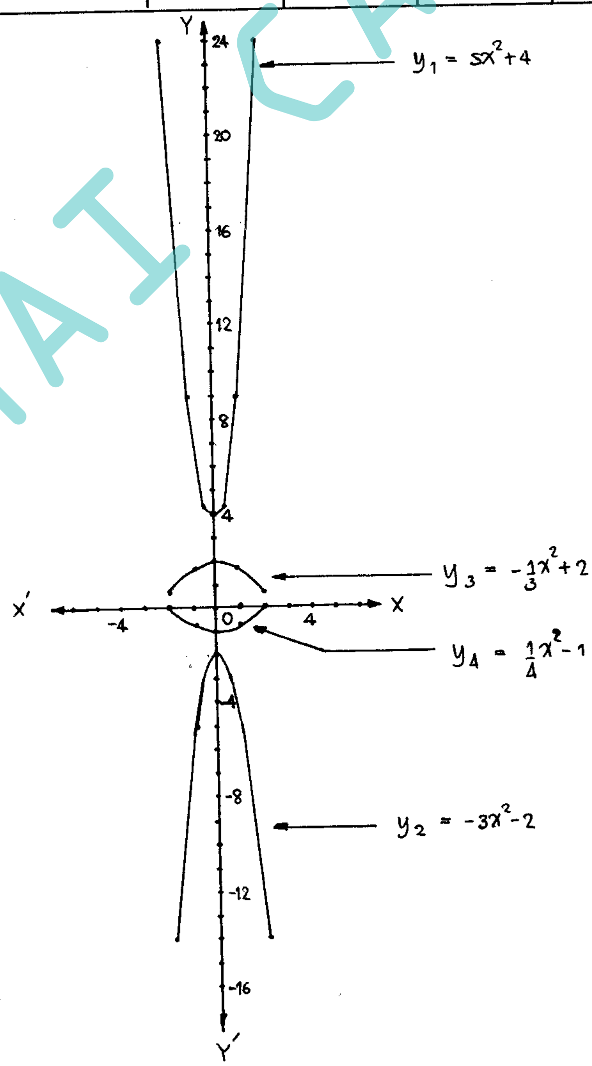
1) $y_1 = 5x^2 + 4$

2) $y_2 = -3x^2 - 2$

3) $y_3 = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

4) $y_4 = \frac{1}{4}x^2 - 1$

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = 5x^2+4$	24	9	4	9	24
$y_2 = -3x^2-2$	-14	-5	-2	-5	-14
$y_3 = -\frac{1}{3}x^2+2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y_4 = \frac{1}{4}x^2-1$	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0



ตอบ

2. จงพิจารณาว่า พาราโบลา C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นกราฟของสมการใด ต่อไปนี้

1) $y_1 = \frac{1}{3}x^2 - 5$ 2) $y_2 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

3) $y_3 = 3x^2 - 5$ 4) $y_4 = -x^2 + 1$

<u>ตอบ</u> สังเกต ที่ 1) และ 3) มีค่า a เป็นบวก $(a > 0)$

ซึ่ง 1) y_1 มี $a_1 = \frac{1}{3}$ และ 3) y_3 มี $a_3 = 3$

ดังนั้น y_1 และ y_3 เป็นพาราโบลา "หงาย" มีจุดต่ำสุด

เมื่อ $a_1 = \frac{1}{3}$ และ $a_3 = 3$

$\therefore$ $a_1 < a_3$ เพราะ $\frac{1}{3} < 3$

<u>เมื่อ $a > 0$</u> : ค่า a ยิ่งน้อย กราฟยิ่งกว้าง ค่า a ยิ่งมาก กราฟยิ่งแคบ

ดังนั้น $y_1 = \frac{1}{3}x^2 - 5$ คือ C_1 เพราะ $a > 0$ (กราฟหงาย) และ a ยิ่งน้อย (กราฟกว้าง)

$y_3 = 3x^2 - 5$ คือ C_2 เพราะ $a > 0$ (กราฟหงาย) และ a ยิ่งมาก (กราฟแคบ)

และ 2) และ 4) มีค่า a เป็นลบ $(a < 0)$

ซึ่ง 2) $y_2 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ และ 4) $y_4 = -x^2 + 1$

ดังนั้น y_2 และ y_4 เป็น พาราโบลา "คว่ำ" มีจุดสูงสุด

เมื่อ $a_2 = -\frac{1}{4}$ และ $a_4 = -1$

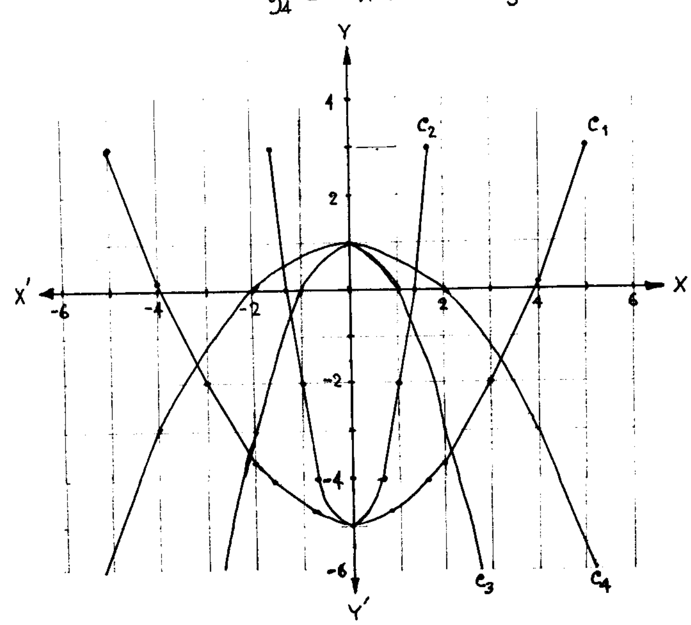
$\therefore$ $|a_2| < |a_4|$ เพราะ $\frac{1}{4} < 1$

(เนื่องจาก $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ และ $|-1| = 1$)

<u>เมื่อ $a < 0$</u> : ค่า $|a|$ ยิ่งน้อย กราฟยิ่งกว้าง ค่า $|a|$ ยิ่งมาก กราฟยิ่งแคบ

ดังนั้น $y_2 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ คือ C_4 เพราะ $a < 0$ (กราฟคว่ำ) และ $|a|$ ยิ่งน้อย (กราฟกว้าง)

$y_4 = -x^2 + 1$ คือ C_3 เพราะ $a < 0$ (กราฟคว่ำ) และ $|a|$ ยิ่งมาก (กราฟแคบ)



4.4 พาราโบลา ที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

จากสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

► ถ้าให้ $h = 0$ และ $k = 0$ ก็จะได้ $y = a(x-0)^2 + 0$

หรือ $y = ax^2$ ตามรายละเอียดในหัวข้อ 4.2

► ถ้าให้ $h = 0$ และ $k \neq 0$ ก็จะได้ $y = a(x-0)^2 + k$

หรือ $y = ax^2 + k$ ตามรายละเอียดในหัวข้อ 4.3

► ดังนั้น ถ้า $h \neq 0$ และ $k \neq 0$ ก็จะได้ $y = a(x-h)^2 + k$

ซึ่ง สมการ เป็นไปได้ ทั้ง $h \neq 0$ แต่ $k = 0$ หรือ $y = a(x-h)^2 + 0$

ทั้ง $h = 0$ แต่ $k \neq 0$ หรือ $y = a(x-0)^2 + k$ (หัวข้อ 4.3)

และ ทั้ง $h \neq 0$ และ $k \neq 0$ หรือ $y = a(x-h)^2 + k$ (หัวข้อนี้)

★ <u>อย่างที่เคยกล่าวในหัวข้อ 4.3 ว่า</u> จุดยอดของกราฟ คือ พิกัด (h,k) เราจึงอ้าง (h,k) ว่าเป็นจุดยอดของพาราโบลา

ลองมาพิจารณา สมการ $y = a(x-h)^2 + k$

<u>กรณีที่ 1</u> $k = 0$ จะได้ $y = a(x-h)^2 + 0$

หรือ $y = a(x-h)^2$

แสดงว่า จุดยอดของกราฟ อยู่ที่พิกัด $(h,k) = (h,0)$ เพราะ $k = 0$

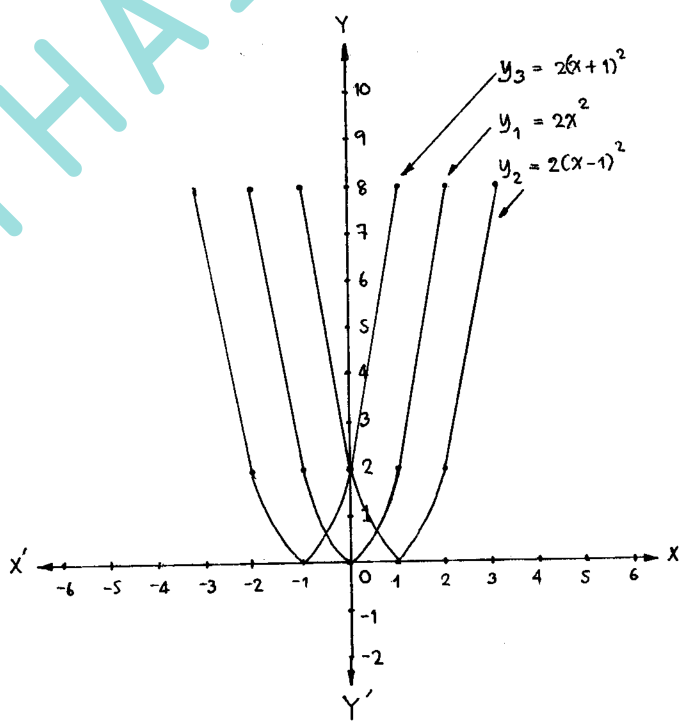
พิจารณาสมการ $y_1 = 2x^2$, $y_2 = 2(x-1)^2$ และ $y_3 = 2(x+1)^2$

y_1 มี $h = 0$, $k = 0$ ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่พิกัด $(0,0)$

y_2 มี $h = 1$, $k = 0$ ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่พิกัด $(1,0)$

y_3 มี $h = -1$ เพราะ $(x+1) = (x-(-1))$ ดังนั้น $h = -1$

และ $k = 0$; จุดยอด อยู่ที่พิกัด $(-1,0)$



<u>ข้อสังเกต</u> ของสมการ $y = a(x-h)^2$ เมื่อ $a \neq 0$, $h \neq 0$ และ $k = 0$

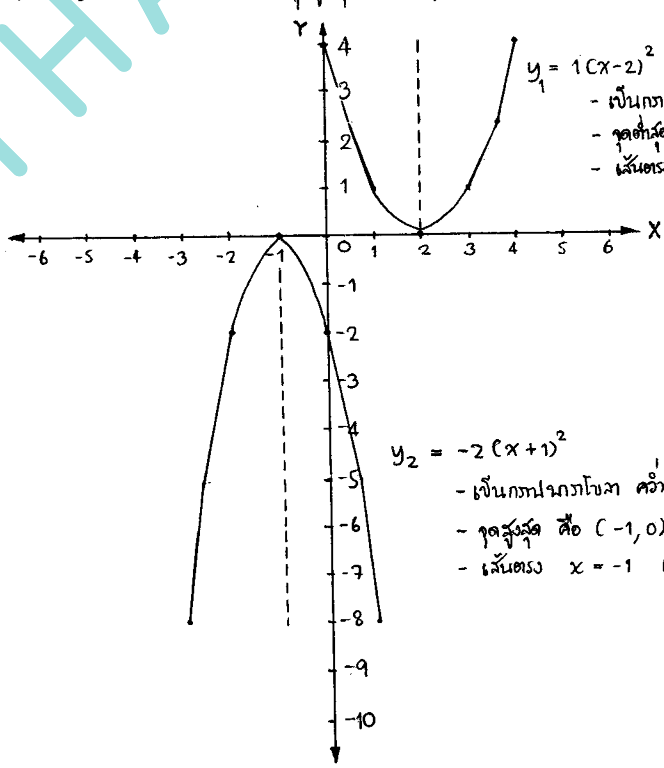
1. ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นพาราโบลา หงาย ที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
2. ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นพาราโบลา คว่ำ ที่มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
3. พิกัด $(h,k) = (h,0)$ เป็นจุดยอดของกราฟ
   - ถ้า กราฟคว่ำ $(h,0)$ จะเป็นจุด สูงสุด
   - ถ้า กราฟหงาย $(h,0)$ จะเป็นจุด ต่ำสุด
   - จุด $(h,0)$ อยู่ทางขวามือ ของแกน Y เมื่อ $h > 0$
   - จุด $(h,0)$ อยู่ทางซ้ายมือ ของแกน Y เมื่อ $h < 0$

<u>ดังนั้น</u> กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ เป็นกราฟที่ได้จากการเลื่อนขนานกราฟของสมการ $y = ax^2$ ตามแนวแกน X ไปทางขวา h หน่วย เมื่อ $h>0$ และไปทางซ้าย h หน่วย เมื่อ $h<0$

<u>จากข้อสังเกตข้างต้น</u> เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมการพาราโบลา $y = a(x-h)^2$ มาสรุปเป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่า พาราโบลา "หงาย" หรือ "คว่ำ" ดูจากค่า a ในสมการ
   $a < 0$ กราฟคว่ำ มีจุดสูงสุด
   $a > 0$ กราฟหงาย มีจุดต่ำสุด
2. จุดยอด อยู่ที่พิกัด $(h,0)$
   $a < 0$ กราฟคว่ำ ได้จุดยอด เป็นจุดสูงสุด
   $a > 0$ กราฟหงาย ได้จุดยอด เป็นจุดต่ำสุด
3. แกนสมมาตร คือเส้นตรง $x = h$
4. ใช้ค่า x ง่ายๆ เช่น $x = -2, -1, 0, 1, 2$ เพื่อหาค่า y ในการเขียนกราฟ

<u>ต่อไป</u> เป็นตัวอย่างของการเขียนกราฟ พาราโบลา $y = a(x-h)^2$ ทั้ง $a > 0$ (กราฟหงาย มีจุดต่ำสุด ที่ $(h,0)$) และ $a < 0$ (กราฟคว่ำ มีจุดสูงสุดที่ $(h,0)$)



$y_1 = 1(x-2)^2$
- เป็นกราฟพาราโบลา หงาย เพราะ $a = 1$ และ $1 > 0$
- จุดต่ำสุด คือ $(2,0)$
- เส้นตรง $x = 2$ เป็นแกนสมมาตร

$y_2 = -2(x+1)^2$
- เป็นกราฟพาราโบลา คว่ำ เพราะ $a = -2$ และ $-2 < 0$
- จุดสูงสุด คือ $(-1,0)$
- เส้นตรง $x = -1$ เป็นแกนสมมาตร

<u>แบบฝึกหัด 4.4 ก</u>

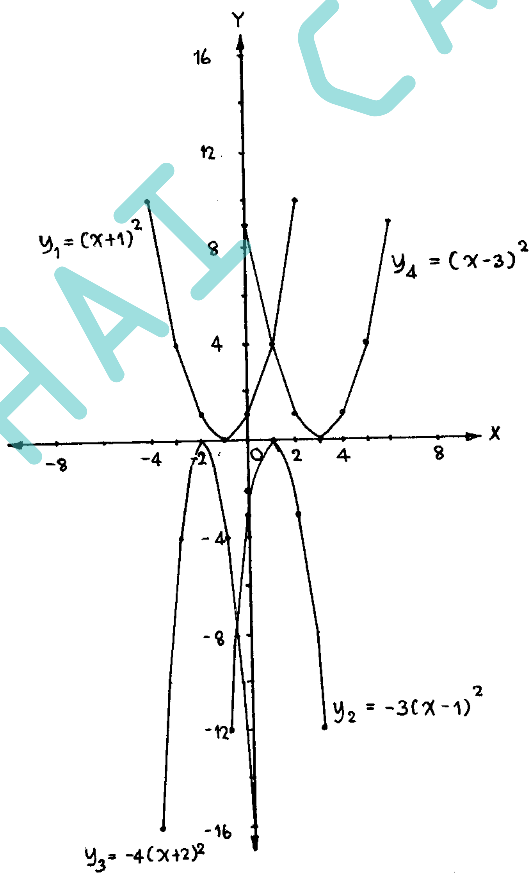
1. จงเขียนกราฟ ของสมการ ต่อไปนี้

1) $y_1 = (x+1)^2$ 2) $y_2 = -3(x-1)^2$

3) $y_3 = -4(x+2)^2$ 4) $y_4 = (x-3)^2$

สมการ	พิจารณา ค่า a	พิจารณาจุดยอด (h,k)	พิจารณา ความ กว้าง / แคบ
$y_1 = (x+1)^2$	$a = 1$ กราฟหงาย	$(-1,0)$ เป็นจุดต่ำสุด	$\lvert a\rvert = \lvert 1\rvert = 1$ กราฟกว้าง เท่า y_4
$y_2 = -3(x-1)^2$	$a = -3$ กราฟคว่ำ	$(1,0)$ เป็นจุดสูงสุด	$\lvert a\rvert = \lvert -3\rvert = 3$ กราฟ แคบ
$y_3 = -4(x+2)^2$	$a = -4$ กราฟคว่ำ	$(-2,0)$ เป็นจุดสูงสุด	$\lvert a\rvert = \lvert -4\rvert = 4$ กราฟ แคบ ที่สุด
$y_4 = (x-3)^2$	$a = 1$ กราฟ หงาย	$(3,0)$ เป็นจุดต่ำสุด	$\lvert a\rvert = \lvert 1\rvert = 1$ กราฟกว้าง เท่า y_1

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = (x+1)^2$	1	0	1	4	9
$y_2 = -3(x-1)^2$	-27	-12	-3	0	-3
$y_3 = -4(x+2)^2$	0	-4	-16	-36	-64
$y_4 = (x-3)^2$	25	16	9	4	1



<u>ตอบ</u>

2. จงพิจารณาว่า พาราโบลา c_1 , c_2 , c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใด ต่อไปนี้

1) $y_1 = -(x+3)^2$ 2) $y_2 = (x+5)^2$

3) $y_3 = -(x-2)^2$ 4) $y_4 = (x-1)^2$

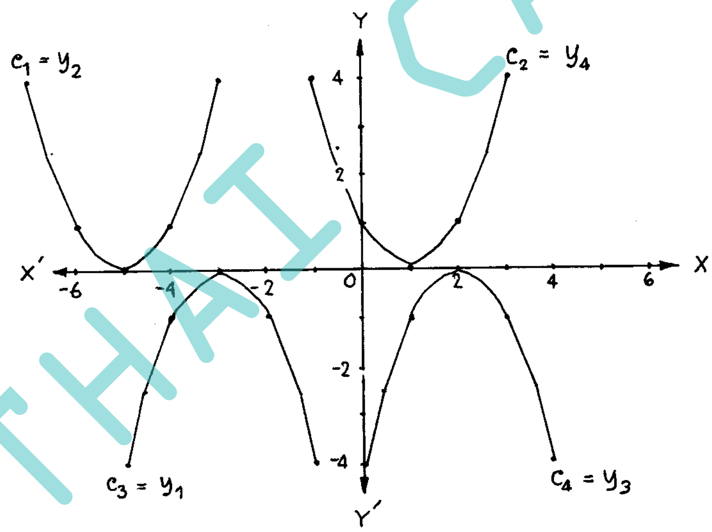
สมการ	$a > 0$ กราฟหงาย	$a < 0$ กราฟคว่ำ	พิกัด $(h,k) = (h,0)$
$y_1 = -(x+3)^2$		✓ $a = -1$	$(-3, 0)$ เป็นจุดสูงสุด
$y_2 = (x+5)^2$	✓ $a = 1$		$(-5, 0)$ เป็นจุดต่ำสุด
$y_3 = -(x-2)^2$		✓ $a = -1$	$(2, 0)$ เป็นจุดสูงสุด
$y_4 = (x-1)^2$	✓ $a = 1$		$(1, 0)$ เป็นจุดต่ำสุด

ดังนั้น y_1 คือ กราฟ c_3

y_2 คือ กราฟ c_1

y_3 คือ กราฟ c_4

y_4 คือ กราฟ c_2

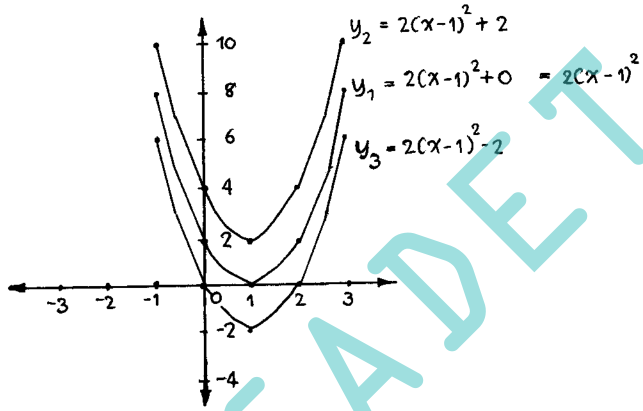


ตอบ

กรณีที่ 2 $k \neq 0$ และ $h \neq 0$ จะได้สมการ $y = a(x-h)^2 + k$

ให้พิจารณาสมการ $y_1 = 2(x-1)^2$, $y_2 = 2(x-1)^2+2$ และ $y_3 = 2(x-1)^2 - 2$

x	-1	0	1	2	3
$y_1 = 2(x-1)^2$	8	2	0	2	8
$y_2 = 2(x-1)^2+2$	10	4	2	4	10
$y_3 = 2(x-1)^2-2$	6	0	-2	0	6



ข้อสังเกต ของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$, $h \neq 0$ และ $k \neq 0$ เป็นดังนี้

1. ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นพาราโบลา "หงาย" มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
2. ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นพาราโบลา "คว่ำ" มีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนสมมาตร
3. จุด (h,k) เป็นจุดยอด ของกราฟ
   ถ้า $a > 0$ กราฟหงาย (h,k) เป็นจุดต่ำสุด
   ถ้า $a < 0$ กราฟคว่ำ (h,k) เป็นจุดสูงสุด
4. กราฟของสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เป็นกราฟที่ได้จากการเลื่อนขนาน ของกราฟของสมการ $y = a(x-h)^2$ ตามแนวแกน Y ขึ้นไปเหนือแกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และลงมาใต้แกน X เป็นระยะ k หน่วย เมื่อ $k < 0$

เราจึงสามารถนำความรู้เกี่ยวกับกราฟของพาราโบลา $y = a(x-h)^2 + k$ มาสรุปเป็นขั้นตอนในการเขียนกราฟ ดังนี้

1. พิจารณาว่า กราฟพาราโบลา "คว่ำ" หรือ "หงาย" ดูจากค่า a
   ถ้า $a > 0$ เป็นพาราโบลา "หงาย" มีจุดต่ำสุด ที่ (h,k)
   ถ้า $a < 0$ เป็นพาราโบลา "คว่ำ" มีจุดต่ำสุด ที่ (h,k)
2. จุดยอด ซึ่งอาจเป็นจุดต่ำสุด (กรณีกราฟหงาย) หรือเป็นจุดสูงสุด (กรณีกราฟคว่ำ) คือพิกัด (h,k)
3. แกนสมมาตร คือแกน $x = h$
4. เขียน/วาดรูปกราฟพาราโบลา พิกัด (x,y) ได้มาจากการคำนวณ
   ที่ x เป็นตัวแปรต้น y เป็นตัวแปรตาม ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณโดยการใส่ค่าตัวแปร x ในสมการ

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของสมการ $y_1 = (x-2)^2+3$ และ $y_2 = -2(x+1)^2-3$

วิธีทำ พิจารณา $y_1 = 1(x-2)^2+3$

มี $a = 1$, $h = 2$, $k = 3$ $\therefore (h,k) = (2,3)$

- เป็นกราฟพาราโบลาหงาย เพราะ $a = 1$ และ $1 > 0$ จึงมีจุดต่ำสุด
- จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (2,3)$

* - แกนสมมาตร คือ $x = h$ หรือ $x = 2$

* การรู้แกนสมมาตรเป็นข้อดี ทำให้เราทราบว่า จะเริ่มเขียนกราฟ จากตำแหน่งไหน เพราะจุดยอด จะอยู่บนแกนสมมาตรนั่นเอง

พิจารณา $y_2 = -2(x+1)^2-3$

มี $a = -2$, $h = -1$ เพราะ $(x-h) = (x-(-1))$ และ $k = -3$

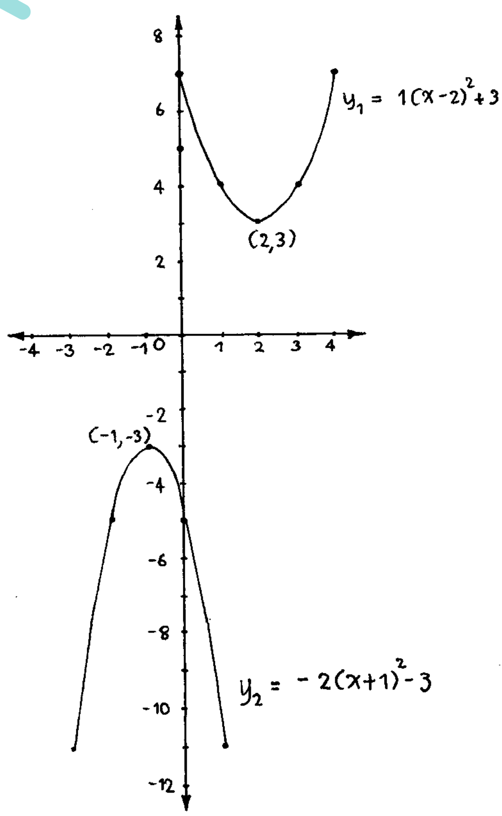
- เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ เพราะ $a = -2$ และ $-2 < 0$ จึงมีจุดสูงสุด
- จุดสูงสุด อยู่ที่พิกัด $(h,k) = (-1,-3)$

* - แกนสมมาตร คือ $x = h$ หรือ $x = -1$

* อ่านข้อดีของแกนสมมาตร ตามเนื้อหาข้างต้นของสมการ y_1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_1 = 1(x-2)^2+3$	N/A	N/A	N/A	7	4	3	4	7
$y_2 = -2(x+1)^2-3$	-11	-5	-3	-5	-11	N/A	N/A	N/A

N/A = Not Applicable หรือ ไม่มีความจำเป็น เพราะข้อมูลส่วนอื่นนั้นเพียงพอ สำหรับการสร้างกราฟแล้ว



ตอบ

มองภาพรวม สมการ $y = a(x-h)^2 + k$ ในคำอธิบาย และรูปแบบกราฟที่ง่าย ๆ

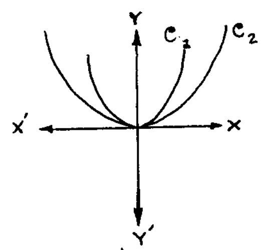
หัวข้อ 4.2 รูปแบบที่ง่ายที่สุด $y = ax^2$

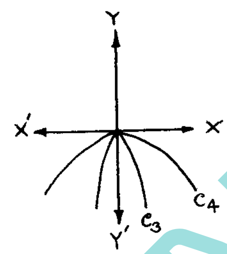
รูปแบบนี้ เกิดจาก $a \neq 0,\ h = 0,\ k = 0$

ทำให้ $y = a(x-h)^2 + k = a(x-0)^2 + 0$

$\therefore y = ax^2$ นั่นเอง

- แกนสมมาตร อยู่ที่ $x = h$ เมื่อ $h = 0$ ดังนั้นแกนสมมาตรคือ $x = 0$ หรือแกน Y นั่นเอง
- ถ้า $a > 0$ เป็นกราฟหงาย มีจุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,0)$
  ถ้า $a < 0$ เป็นกราฟคว่ำ มีจุดสูงสุด อยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,0)$
- $|a|$ มีค่าน้อย กราฟกว้าง , $|a|$ มีค่ามาก กราฟแคบ





c_1 และ c_2 มีค่า $a > 0$
จึงเป็นกราฟหงาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(h,k) = (0,0)$
$|a_1| > |a_2|$ จึงทำให้ c_1 แคบกว่า c_2

c_3 และ c_4 มีค่า $a < 0$
จึงเป็นกราฟคว่ำ จุดสูงสุดอยู่ที่ $(h,k) = (0,0)$
$|a_3| > |a_4|$ จึงทำให้ c_3 แคบกว่า c_4

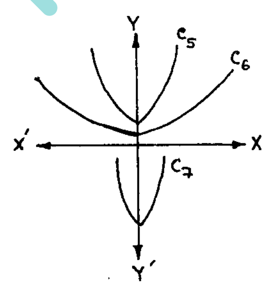
หัวข้อ 4.3 รูปแบบ $y = ax^2 + k$

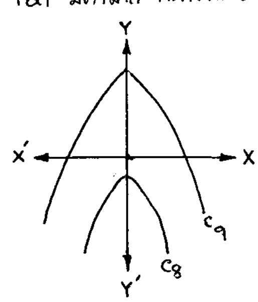
รูปแบบนี้ เกิดจาก $a \neq 0$, $h = 0$ แต่ $k \neq 0$

ทำให้ $y = a(x-h)^2 + k = a(x-0)^2 + k$

$\therefore y = ax^2 + k$ นั่นเอง

- แกนสมมาตร อยู่ที่ $x = h$ เมื่อ $h = 0$ ดังนั้น แกนสมมาตรคือ $x = 0$ หรือแกน Y นั่นเอง
- ถ้า $a > 0$ เป็นกราฟหงาย มีจุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,k)$
  ถ้า $a < 0$ เป็นกราฟคว่ำ มีจุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,k)$
- $|a|$ มีค่าน้อย กราฟกว้าง , $|a|$ มีค่ามาก กราฟแคบ





c_8 และ c_9 มีค่า $a < 0$ จึงเป็นกราฟคว่ำ
จุดสูงสุดอาจอยู่เหนือแกน X หรืออยู่ใต้แกน X
ซึ่งอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,k)$
$|a_8| > |a_9|$ จึงทำให้ c_8 แคบกว่า c_9

c_5 , c_6 และ c_7 มีค่า $a > 0$
จึงเป็นกราฟหงาย จุดต่ำสุดอาจอยู่เหนือแกน X หรืออยู่ใต้แกน X ซึ่งอยู่ที่พิกัด $(h,k) = (0,k)$
$|a_7| > |a_5| > |a_6|$ จึงทำให้ c_7 แคบกว่า c_5 และ c_5 แคบกว่า c_6

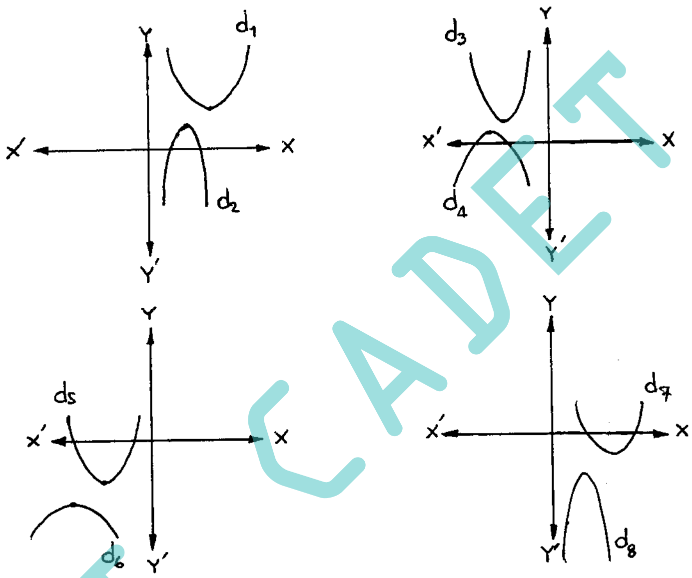
หัวข้อ 4.4 รูปแบบ $y = a(x-h)^2 + k$

รูปแบบนี้ เกิดจาก $a \neq 0$, $h \neq 0$ และ $k \neq 0$

ทำให้ $y = a(x-h)^2 + k$ เป็นรูปแบบของพาราโบลาที่สมบูรณ์

- แกนสมมาตรอยู่ที่ $x = h$
- ถ้า $a > 0$ เป็นกราฟหงาย มีจุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด (h,k)

  ถ้า $a < 0$ เป็นกราฟคว่ำ มีจุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด (h,k)
- $|a|$ มีค่าน้อย กราฟกว้าง , $|a|$ มีค่ามาก กราฟแคบ



- พาราโบลา d_1 และ d_2 มี $h > 0$ และ $k > 0$ ทำให้พาราโบลาทั้งสองมี (h,k) อยู่ใน Q_1

  เช่น $y_1 = 2(x-\underline{1})^2 + \underline{2}$

  $y_2 = -3(x-\underline{1})^2 + \underline{2}$

  d_1 มี $a_1 > 0$ จึงเป็นกราฟหงาย
  d_2 มี $a_2 < 0$ จึงเป็นกราฟคว่ำ } มีจุดยอดที่พิกัด (h,k)

- พาราโบลา d_3 และ d_4 มี $h < 0$ แต่ $k > 0$ ทำให้พาราโบลาทั้งสองมี (h,k) อยู่ใน Q_2
  คืออยู่ทางซ้ายของแกน Y แต่อยู่เหนือแกน X เช่น $y_3 = 2(x+\underline{1})^2 + \underline{2}$; $y_4 = -(x+\underline{1})^2 + \underline{2}$

  d_3 มี $a_3 > 0$ จึงเป็นกราฟหงาย
  d_4 มี $a_4 < 0$ จึงเป็นกราฟคว่ำ } มีจุดยอดที่พิกัด (h,k)

- พาราโบลา d_5 และ d_6 มี $h < 0$ และ $k < 0$ ทำให้พาราโบลาทั้งสองมี (h,k) อยู่ใน Q_3
  คืออยู่ทางซ้ายของแกน Y และยังอยู่ใต้แกน X เช่น $y_5 = 2(x+\underline{1})^2 - \underline{2}$; $y_6 = -(x+\underline{1})^2 - \underline{2}$

  d_5 มี $a_5 > 0$ จึงเป็นกราฟ หงาย
  d_6 มี $a_6 < 0$ จึงเป็นกราฟ คว่ำ } มีจุดยอดที่พิกัด (h,k)

- พาราโบลา d_7 และ d_8 มี $h > 0$ แต่ $k < 0$ ทำให้พาราโบลาทั้งสอง มี (h,k) อยู่ใน $Q4$
  คืออยู่ทางขวา ของแกน Y แต่ อยู่ใต้แกน X เช่น $y_7 = 2(x-\underline{1})^2 - \underline{2}$; $y_8 = -3(x-\underline{1})^2 \ \underline{2}$

  d_7 มี $a_7 > 0$ จึงเป็นกราฟ หงาย
  d_8 มี $a_8 < 0$ จึงเป็นกราฟ คว่ำ } มีจุดยอดที่พิกัด (h,k)

แบบฝึกหัด 4.4 ข (อ้างอิงสมการ $y = a(x-h)^2+k$ เมื่อ $a \neq 0$)

1. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้

1) $y_1 = \frac{1}{3}(x-1)^2-2$

$a_1 = \frac{1}{3}$ ซึ่ง $\frac{1}{3} > 0$ ดังนั้นเป็นพาราโบลา หงาย มีจุดต่ำสุด

จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด (h,k) ซึ่ง $h = 1, k = -2$

ดังนั้น จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(1,-2)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = 1$

2) $y_2 = -(x+1)^2-3$

$a_2 = -1$ ซึ่ง $-1 < 0$ ดังนั้น เป็นพาราโบลา คว่ำ มีจุดสูงสุด

จุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด (h,k) ซึ่ง $h = -1$ และ $k = -3$

ดังนั้น จุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด $(-1,-3)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = -1$

3) $y_3 = -3(x+1)^2+3$

$a_3 = -3$ ซึ่ง $-3 < 0$ ดังนั้น เป็นพาราโบลา คว่ำ มีจุดสูงสุด

จุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด (h,k) ซึ่ง $h = -1$ และ $k = 3$

ดังนั้น จุดสูงสุดอยู่ที่พิกัด $(-1,3)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = -1$

4) $y_4 = \frac{1}{5}(x+2)^2+2$

$a_4 = \frac{1}{5}$ ซึ่ง $\frac{1}{5} > 0$ ดังนั้น เป็นพาราโบลา หงาย มีจุดต่ำสุด

จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด (h,k) ซึ่ง $h = -2$ และ $k = 2$

ดังนั้น จุดต่ำสุดอยู่ที่พิกัด $(-2,2)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = -2$

เมื่อ $|a_1| = \frac{1}{3}$, $|a_2| = 1$, $|a_3| = 3$ และ $|a_4| = \frac{1}{5}$

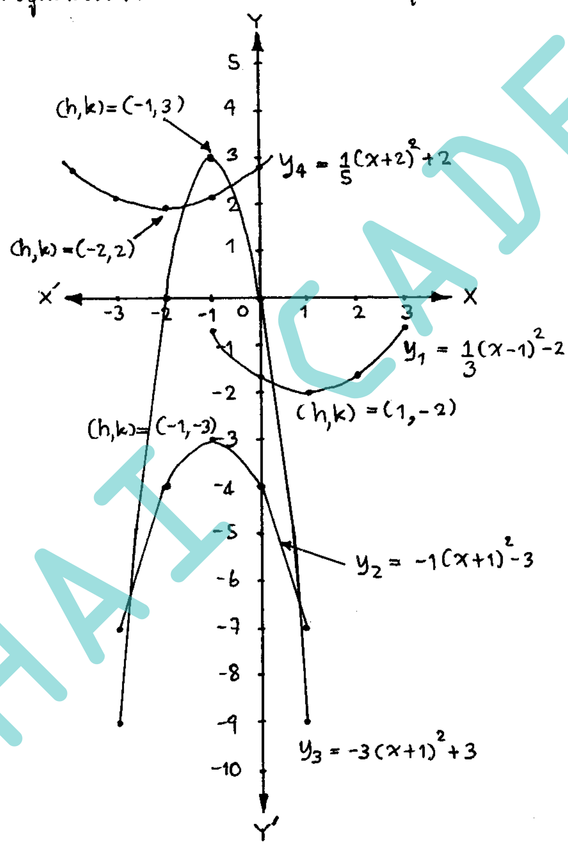
ดังนั้น $|a_3| > |a_2| > |a_1| > |a_4|$ ทำให้ y_3 แคบกว่า y_2

y_2 แคบกว่า y_1

และ y_1 แคบกว่า y_4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = \frac{1}{3}(x-1)^2 - 2$	N/A	N/A	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$y_2 = -1(x+1)^2 - 3$	-7	-4	-3	-4	-7	N/A	N/A
$y_3 = -3(x+1)^2 + 3$	-9	0	3	0	-9	N/A	N/A
$y_4 = \frac{1}{5}(x+2)^2 + 2$	$\frac{11}{5}$	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{14}{5}$	N/A	N/A	N/A

N/A = Not Applicable หรือไม่มีความจำเป็นที่ต้องหาค่านั้นๆ
เพราะ ไม่อยู่ในขอบเขตจำเป็นสำหรับการเขียนกราฟ ทั้งๆ ที่สามารถหาค่าได้ก็ตาม



ตอบ

2. พิจารณาว่า พาราโบลา c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นกราฟของสมการใด ต่อไปนี้

1) $y_1 = -(x-6)^2-1$ 2) $y_2 = (x+4)^2-1$

3) $y_3 = -(x-4)^2$ 4) $y_4 = (x+2)^2$

สมการ	พิจารณาค่า a		พิกัด (h,k)		พิจารณา $\lvert a \rvert$	
	$a>0$ กราฟหงาย	$a<0$ กราฟคว่ำ	จุดต่ำสุด	จุดสูงสุด	$\lvert a \rvert$ น้อย กราฟกว้าง	$\lvert a \rvert$ มาก กราฟแคบ
$y_1 = -(x-6)^2-1$		✓ $a=-1$		$(6,-1)$	✓	
$y_2 = (x+4)^2-1$	✓ $a=1$		$(-4,-1)$		✓	
$y_3 = -(x-4)^2$		✓ $a=-1$		$(4,0)$	✓	
$y_4 = (x+2)^2$	✓ $a=1$		$(-2,0)$		✓	

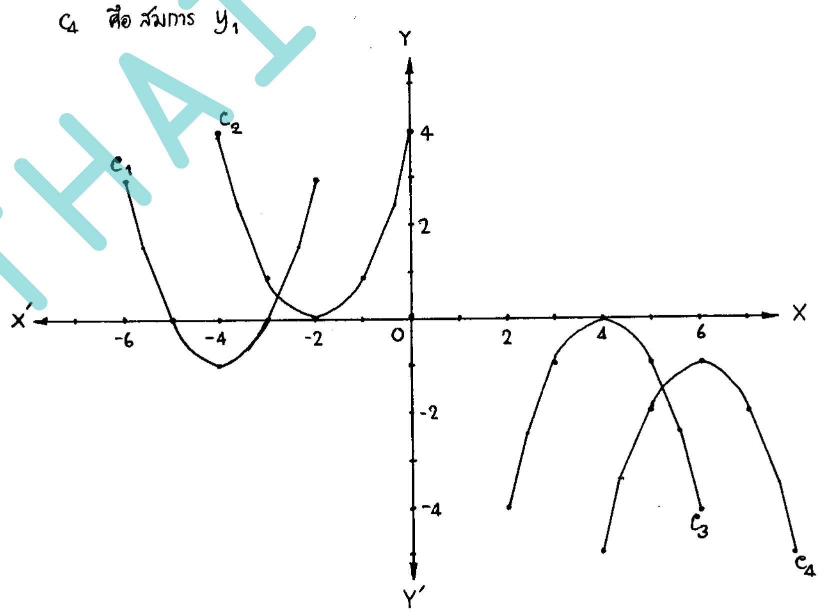
note : เนื่องจากทั้งสี่สมการ มี $\lvert a \rvert = 1$ ดังนั้น กราฟทั้งสี่ กว้างเท่ากัน และค่อนข้างกว้าง เพราะ 1 เป็นค่าที่น้อย ใกล้เคียงกับ 0

ดังนั้น c_1 คือ สมการ y_2

c_2 คือ สมการ y_4

c_3 คือ สมการ y_3

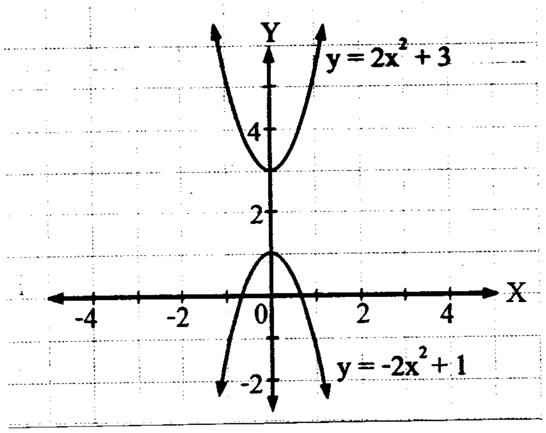
c_4 คือ สมการ y_1



ตอบ

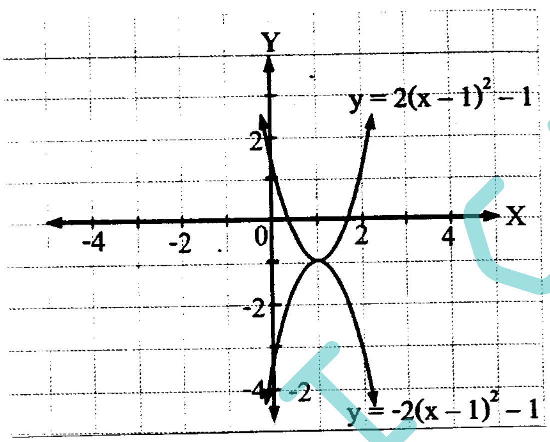
3. จงพิจารณาว่า กราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นการสะท้อน ข้อใดเป็นการเลื่อนขนาน
ถ้าเป็นการสะท้อนให้หาเส้นสะท้อน ถ้าเป็นการเลื่อนขนานให้บอกว่าเป็นการเลื่อนขนานตามแนวเส้นตรงใด เป็นระยะกี่หน่วย ในทิศทางใด

1)



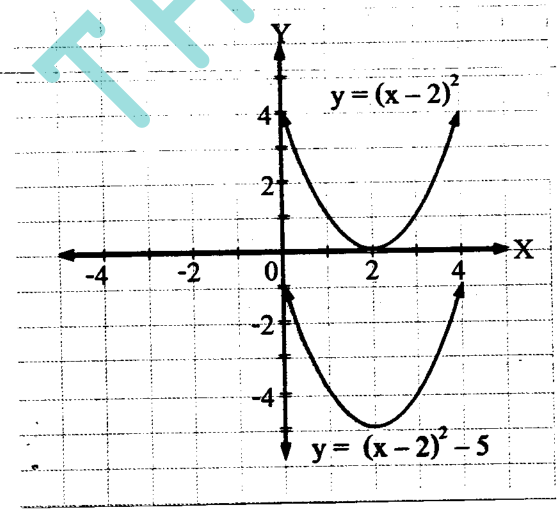
เป็นการสะท้อน
มีเส้นตรง $y = 2$ เป็นแกนสะท้อน
เพราะถ้าพับกระดาษ ตามแกนสะท้อนแล้ว
$y_1 = 2x^2+3$ และ $y_2 = -2x^2+1$ จะทับกันสนิทพอดี

2)



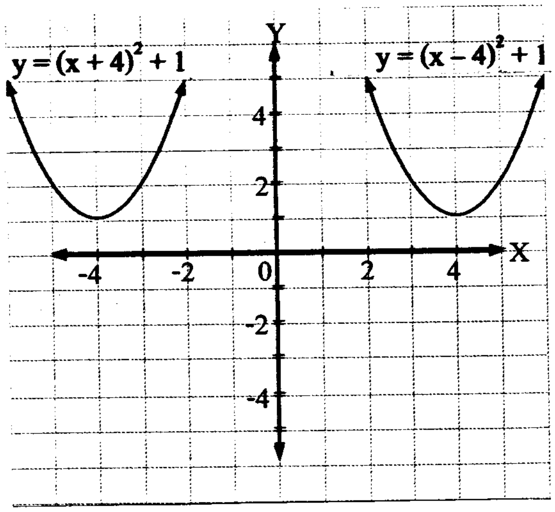
เป็นการสะท้อน
มีเส้นตรง $y = -1$ เป็นแกนสะท้อน
เพราะถ้าพับกระดาษ ตามแกนสะท้อนแล้ว
$y_3 = 2(x-1)^2-1$ และ $y_4 = -2(x-1)^2-1$ จะทับกันสนิท
พอดี

3)



เป็นการเลื่อนขนานขึ้น/ลง ตามแนวเส้นตรง $x = 2$
เป็นระยะ 5 หน่วย

4.



เป็นการเลื่อนขนานไปทาง ซ้าย/ขวา

ตามแนวเส้นตรง $y = 1$

เป็นระยะ ๘ หน่วย

4.5 พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2+bx+c$ เมื่อ $a \neq 0$

จากหัวข้อ 4.2 ถึง 4.4 เราได้ศึกษาสมการพาราโบลา ที่อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2+k$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นรูปแบบสมการที่ พิกัด (h,k) คือจุดยอดของสมการ

★ แต่ในคราวนี้ เราอาจพบสมการพาราโบลา ในรูปของ $y = ax^2+bx+c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

★★ เพื่อความเข้าใจร่วมกัน จึงอยากบอกว่า สามารถแปลง $y = a(x-h)^2+k$ ไปเป็น $y = ax^2+bx+c$ หรือแปลง $y = ax^2+bx+c$ ไปเป็น $y = a(x-h)^2+k$ ได้

★★★ วิธีการแปลง คือใช้วิธี "กำลังสองสมบูรณ์" ครับ

ง่ายมากๆ มาดูวิธีทำกันดีกว่าครับ

__ตัวอย่างที่ 1__ จงเขียนกราฟของสมการ $y_1 = 3x^2-6x+1$ และ $y_2 = -2x^2-12x-17$

__วิธีทำ__ ทำสมการรูป $y = ax^2+bx+c$ ให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2+k$

จาก
$$\begin{aligned} y_1 &= 3x^2-6x+1 \\ &= 3(x^2-2x)+1 \\ &= 3(x^2-2(x)(1)+1^2-1^2)+1 \\ &= 3(x-1)^2-3(1)+1 \\ y_1 &= 3(x-1)^2-2 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟ y_1 เป็นพาราโบลาหงาย เพราะ $a = 3$ และ $3 > 0$

(h,k) หรือจุดยอด เป็นจุดต่ำสุด อยู่ที่พิกัด $(1,-2)$

มีเส้นตรง $x = h$ หรือ $x = 1$ เป็นแกนสมมาตร

จาก
$$\begin{aligned} y_2 &= -2x^2-12x-17 \\ &= -2(x^2+6x)-17 \\ &= -2(x^2+2(x)(3)+3^2-3^2)-17 \\ &= -2(x+3)^2-2(-9)-17 \\ &= -2(x+3)^2+18-17 \\ &= -2(x+3)^2+1 \end{aligned}$$

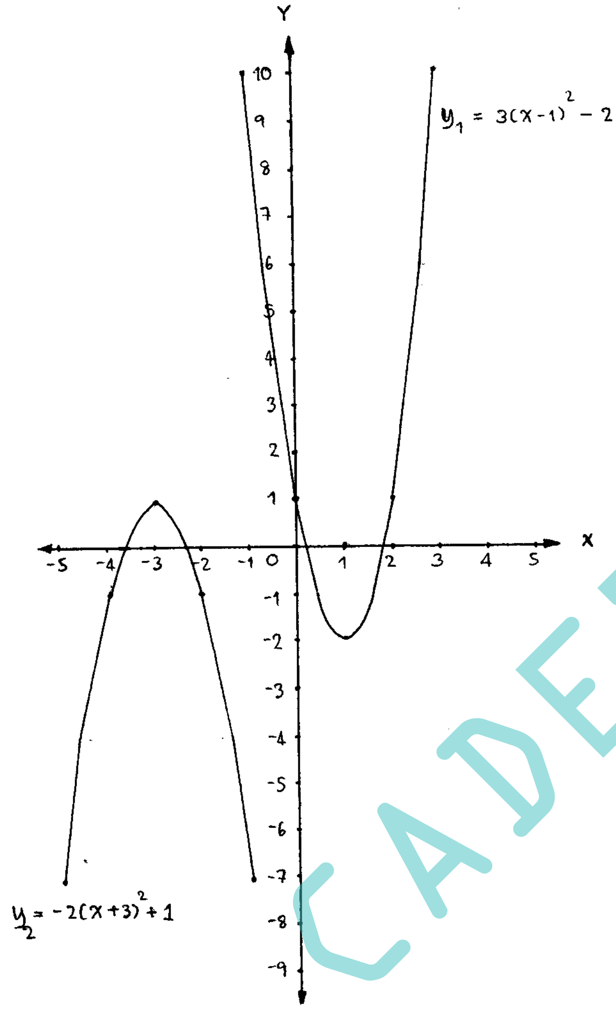
ดังนั้น กราฟ y_2 เป็นพาราโบลาคว่ำ เพราะ $a = -2$ และ $-2 < 0$

(h,k) เป็นจุดยอด หรือจุดสูงสุด อยู่ที่พิกัด $(-3, 1)$

มีเส้นตรง $x = h$ หรือ $x = -3$ เป็นแกนสมมาตร

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_1 = 3(x-1)^2-2$	N/A	N/A	N/A	N/A	10	1	-2	1	10
$y_2 = -2(x+3)^2+1$	-7	-1	1	-1	-7	N/A	N/A	N/A	N/A

N/A = Not Applicable ซึ่งไม่ต้องการค่า y ในช่องนั้นๆ เพื่อเขียนกราฟ



ตอบ

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงเขียนกราฟของแต่ละสมการ ต่อไปนี้

1) $y_1 = x^2 + 6x + 8$

2) $y_2 = -x^2 - 4x - 2$

วิธีทำ

จาก $y_1 = x^2 + 6x + 8$

$$y_1 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 + 8$$
$$= (x+3)^2 - 9 + 8$$
$$= 1(x+3)^2 - 1$$

ซึ่ง $a_1 = 1$ เป็นกราฟหงาย มีจุดต่ำสุด

จุดต่ำสุด อยู่ที่พิกัด $(h,k) = (-3, -1)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = -3$

จาก $y_2 = -x^2 - 4x - 2$

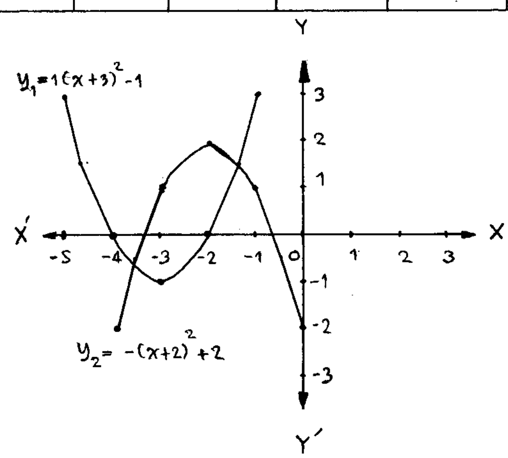
$$= -(x^2 + 4x) - 2$$
$$= -(x^2 + 2(x)(2) + 2^2 - 2^2) - 2$$
$$= -(x+2)^2 - (-4) - 2$$
$$= -(x+2)^2 + 4 - 2$$
$$= -(x+2)^2 + 2$$

ซึ่ง $a_2 = -1$ เป็นกราฟคว่ำ มีจุดสูงสุด

จุดสูงสุด อยู่ที่พิกัด $(h,k) = (-2, 2)$

แกนสมมาตร คือแกน $x = h$ หรือ $x = -2$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y_1 = 1(x+3)^2 - 1$	3	0	-1	0	3	N/A
$y_2 = -1(x+2)^2 + 2$	N/A	-2	1	2	1	2



ตอบ

2. จงพิจารณาสมการ $y = 2x^2 + 5x - 2$ และ $y = -x^2 + 6x - 14$
แล้ว ตอบคำถามต่อไปนี้ โดยไม่ต้องเขียนกราฟ

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2x^2+5x-2 \\
&= 2(x^2 + \tfrac{5}{2}x - 1) \\
&= 2(x^2 + 2(x)(\tfrac{5}{4}) + (\tfrac{5}{4})^2 - (\tfrac{5}{4})^2 - 1) \\
&= 2((x+\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{25}{16} - \tfrac{16}{16}) \\
&= 2((x+\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{41}{16}) \\
&= 2(x+\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{41}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= -x^2+6x-14 \\
&= -(x^2-6x+14) \\
&= -(x^2-2(x)(3)+3^2-3^2+14) \\
&= -((x-3)^2+5) \\
&= -(x-3)^2-5
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$y_1 = 2x^2+5x-2$
$= 2(x+\frac{5}{4})^2 - \frac{41}{8}$

เป็นพาราโบลาหงาย $(a = 2)$ มีจุดต่ำสุดที่ $(h,k) = (-\frac{5}{4}, -\frac{41}{8})$
แกนสมมาตรคือ $x = h$ หรือ $x = -\frac{5}{4}$
หาจุดตัดแกน X ให้ค่า $y = 0$
จาก $y = 2x^2+5x-2 = 0$
หรือ $2x^2+5x-2 = 0$ ทำให้ $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4(2)(-2)}}{2(2)}$
$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}$
ดังนั้น y_1 ตัดแกน X ที่พิกัด $(\frac{-5+\sqrt{41}}{4}, 0)$ และ $(\frac{-5-\sqrt{41}}{4}, 0)$

$y_2 = -x^2+6x-14$
$= -(x-3)^2-5$

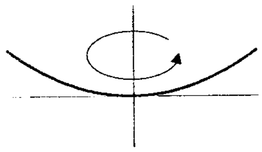
เป็นพาราโบลาคว่ำ $(a = -1)$ มีจุดสูงสุดที่ $(h,k) = (3,-5)$
แกนสมมาตรคือ $x = h$ หรือ $x = 3$
หาจุดตัดแกน X ให้ค่า $y = 0$
จาก $y = -x^2+6x-14 = 0$
หรือ $-x^2+6x-14 = 0$

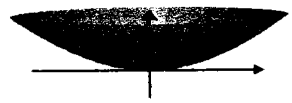
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4(-1)(-14)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-56}}{-2}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{-20}}{-2}$ ซึ่ง $\sqrt{-20}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

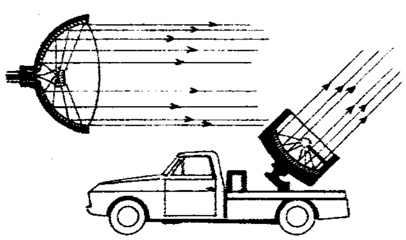
ดังนั้น $y_2 = -x^2+6x-14$ ไม่ตัดแกน X <u>ตอบ</u>

จานพาราโบลา





เมื่อหมุนพาราโบลารอบแกนสมมาตร จะได้สิ่งที่มีลักษณะคล้ายจาน เรียกว่า *ผิวเชิงพาราโบลา* (Parabolic Surface) หรือในที่นี้จะเรียกง่าย ๆ ว่า *จานพาราโบลา*



จานพาราโบลามี*โฟกัส* (Focus) ที่มีสมบัติว่า ถ้าแหล่งกำเนิดของแสง หรือเสียงอยู่ที่จุดนี้ แล้วคลื่นของแสงหรือเสียงจะสะท้อนที่ตัวจานพาราโบลาเป็นเส้นที่ขนานกัน ดังนั้นจึงใช้จานพาราโบลาสะท้อนแสงของไฟฉาย แสงของโคมไฟรถยนต์ และเสียงในลำโพง

สำหรับคลื่นวิทยุก็เช่นเดียวกับคลื่นของแสงหรือเสียง จานเสาอากาศที่มีลักษณะเป็นจานพาราโบลาใช้กับการรับส่งสัญญาณจากดาวเทียม สัญญาณโทรศัพท์และสัญญาณเรดาร์ นอกจากการส่งคลื่นวิทยุแล้ว ในการรับคลื่นวิทยุ เมื่อคลื่นวิทยุมากระทบกับจานพาราโบลาก็จะสะท้อนไปรวมกันที่โฟกัสซึ่งมีอุปกรณ์รับสัญญาณส่งต่อไปยังเครื่องรับ

นักเรียนคิดว่าถ้าเราสร้างเตาพลังงานแสงอาทิตย์ที่จานรับแสงอาทิตย์สร้างจากกระจกเงาเล็ก ๆ มาประกอบกันจนมีลักษณะเป็นจานพาราโบลา เราควรวางอุปกรณ์รับความร้อนไว้ตรงจุดใดจึงจะรับความร้อนได้ตรงจุดที่สุด

สูงแค่ไหน ?

งานบุญบั้งไฟ เป็นงานประเพณีของชาวอีสาน ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปหลังการจุด และระยะทางที่บั้งไฟอยู่เหนือพื้นดิน แสดงได้ด้วยสมการพาราโบลา

ถ้าการจุดบั้งไฟครั้งหนึ่ง ถูกกำหนดด้วยสมการ $h = 16t - t^2$

เมื่อ h แทนความสูงจากระดับพื้นดิน เป็น m

และ t แทนเวลาที่ผ่านไปเป็นวินาที หลังจากการจุด

มาพิจารณาสมการ $h = 16t - t^2$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	---	16
h	0	15	28	39	48	55	60	63	64	63	60	55		0

บั้งไฟขึ้นไปได้สูงที่สุด 64 เมตร ที่วินาทีที่ 8

1. บั้งไฟขึ้นไปได้สูงสุด 64 เมตร ณ วินาทีที่ 8
2. เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาที บั้งไฟอยู่สูงจากพื้น 63 เมตร
3. เมื่อบั้งไฟอยู่สูงจากพื้น 40 เมตร

ดังนั้น จาก $h = 16t - t^2$

$$40 = 16t - t^2$$

หรือ $t^2 - 16t + 40 = 0$

$$t = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(1)(40)}}{2(1)}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{96}}{2}$$

$$= \frac{16 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

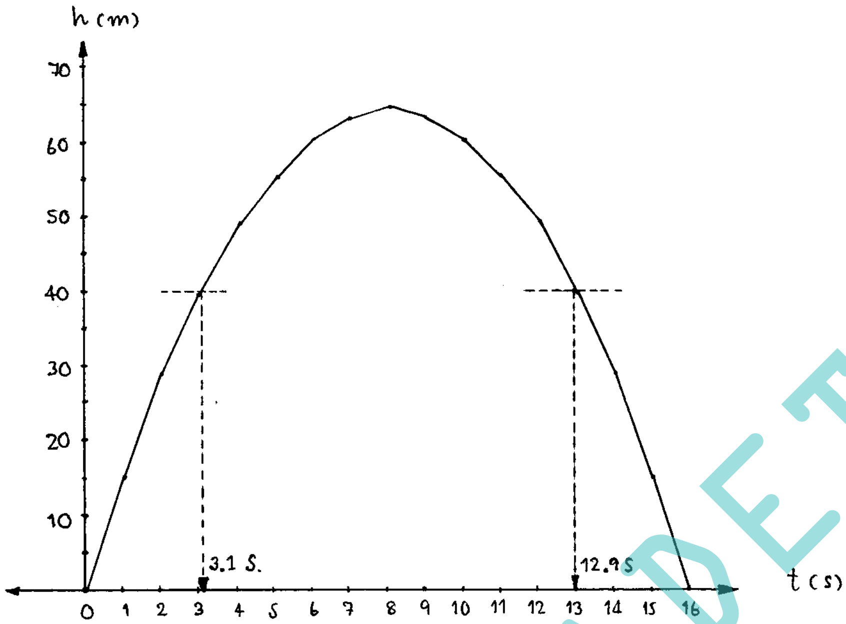
$= 8 \pm 2(2.45)$ เมื่อ $\sqrt{6} \approx 2.45$

$$= 8 \pm 4.90$$

$= 12.90$ และ 3.10

ดังนั้น ที่เวลา 3.10 วินาที และ 12.90 วินาที บั้งไฟจะอยู่สูงจากพื้น 40 เมตร **ตอบ**

กราฟ พาราโบลา สมการ $h = 16t - t^2$



จงทำแบบฝึกหัด ต่อไปนี้

เมื่อยิงพลุสัญญาณจากเรือลำหนึ่งขึ้นไปบนท้องฟ้า ความสูง h ของพลุ จากพื้นน้ำในหน่วยเป็นเมตร เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที หลังจากการยิงสัมพันธ์กัน โดย $h = -1.8t^2 + 18t + 5$

1) สังเกตว่า ที่ $t = 0$; $h = -1.8(0)^2 + 18(0) + 5$

$h = 5$ m

แสดงว่า จุดที่ยิงพลุ อยู่สูงจากพื้น 5 เมตร

2) การหาจุดที่พลุขึ้นไปได้สูงสุด คือการหาจุดยอดของพาราโบลา

เปรียบ $h = -1.8t^2 + 18t + 5$ เป็น $y = -1.8x^2 + 18x + 5$

$= -1.8(x^2 - 10x - \frac{5}{1.8})$ โดย $\frac{5}{1.8} = 2.77$

$= -1.8(x^2 - 2(x)(5) + 5^2 - 5^2 - 2.77)$

$= -1.8((x-5)^2 - 27.77)$ โดย $(1.8)(27.77) \approx 50$

$= -1.8(x-5)^2 + 50$

จุดยอด ของกราฟพาราโบลาคว่ำ หรือ $(h, k) = (5, 50)$

แสดงว่า เมื่อเวลาผ่านไป 5 วินาที พลุจะขึ้นไปได้สูงสุด 50 เมตร

3) ถ้าพลุตกถึงน้ำ แสดงว่า $h = 0$

จาก $h = -1.8t^2 + 18t + 5$

$$0 = -1.8t^2 + 18t + 5$$

$$1.8t^2 - 18t - 5 = 0$$

$$t = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1.8)(-5)}}{2(1.8)}$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{324 + 36}}{2(1.8)} = \frac{18 \pm \sqrt{360}}{2(1.8)}$$

$$= \frac{18 \pm 6\sqrt{10}}{2(1.8)} = \frac{\cancel{6}^{\,1}[3 \pm 3.16]}{\cancel{2}_{1}(\cancel{1.8}_{0.6})}$$ เมื่อ $\sqrt{10} \approx 3.16$

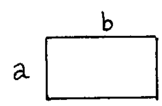
$$= \frac{6.16}{0.6}$$ และ $\cancel{\frac{-0.16}{0.6}}$ เป็นไปไม่ได้ ที่เวลาจะเป็นลบ

$$= 10.26$$ วินาที

ดังนั้น พลุจะตกถึงพื้นน้ำ เมื่อเวลาผ่านไป 10.26 วินาที ภายหลังการยิง <u>ตอบ</u>

<u>หน้า 130</u> <u>หาได้อย่างไร</u> ?

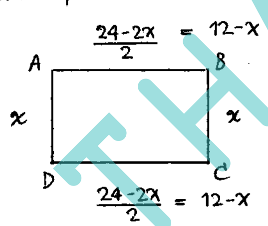
ชมรมเกษตรของโรงเรียน มีการปลูกผักปลอดสารพิษ ซึ่งพื้นที่ปลูกเป็นแปลงรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความยาวรอบรูป 24 เมตร เด็กทั้งสองคนช่วยกันคิดว่า ทำอย่างไรจึงจะมีพื้นที่ปลูกผักได้มากที่สุด จึงทดลองคำนวณ หาพื้นที่ ดังตารางนี้



ความยาวด้าน a (m)	ความยาวด้าน b (m)	พื้นที่ (m^2)
1	11	11
2	10	20
3	9	27
4	8	32
5	7	35
$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	$\boxed{36}$
7	5	35
8	4	32
9	3	27
10	2	20
11	1	11

เด็กสองคนจึงสรุปว่า ถ้ากำหนดแปลงปลูกผักให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส กว้าง 6 เมตร ยาว 6 เมตร จะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด แต่จริงๆ แล้ว เราสามารถคำนวณโดยใช้สมการพาราโบลาได้เช่นกัน

จาก



ซึ่งการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง x ยาว

$$y = x\,(12-x)$$

หรือ $y = 12x - x^2$

แล้วหา จุดยอด หรือ (h,k) ของพาราโบลา

ได้จาก
$$\begin{aligned} y &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x) \\ &= -(x^2-2(x)(6)+6^2-6^2) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

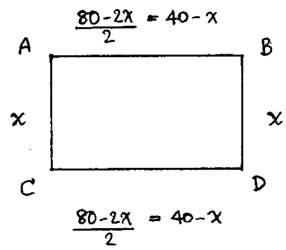
$(h,k) = (6,36)$

แสดงว่า ถ้า $x = 6$ m จะได้พื้นที่มากที่สุด = 36 m^2

ตรงกับที่วาดตารางไว้ข้างต้น พอดี !

<u>ตอบ</u>

อีกตัวอย่างหนึ่งที่คล้ายคลึงกัน : จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวรอบรูป 80 m เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด



พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว

$$y = x(40-x)$$
$$y = 40x-x^2$$
$$y = -x^2+40x$$
$$= -(x^2-40x)$$
$$= -(x^2-2(x)(20)+20^2-20^2)$$
$$y = -(x-20)^2+400$$

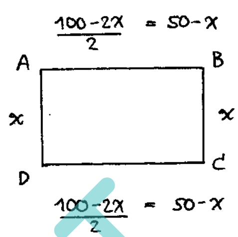
จะได้ $(h,k) = (20,400)$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ถ้า ด้านกว้าง กว้าง 20 เมตร จะทำให้สี่เหลี่ยมมีพื้นที่มากที่สุด เท่ากับ 400 เมตร <u>ตอบ</u>

ดังนั้น เราจึงสามารถทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้ ได้

1) เมื่อมนุษย์ จะทิ้งโลก ไปอยู่บนดาวอังคาร ห้องที่จะอยู่มีความยาวรอบรูป 100 เมตร จงหาว่า ขอบเขตที่ดินจะเป็นอย่างไร

<u>วิธีทำ</u>



พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว

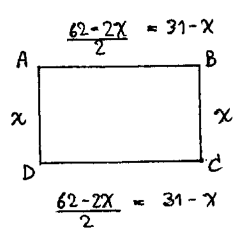
$$y = x(50-x)$$
$$y = 50x-x^2$$
$$= -(x^2-50)$$
$$= -(x^2-2(x)(25)+25^2-25^2)$$
$$= -(x-25)^2+625$$

เมื่อ $(h,k) = (25,625)$ แสดงว่า ต้องกำหนดให้ที่ดินมีด้านกว้าง 25 เมตร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด 625 ตารางเมตร

<u>ตอบ</u>

2) ถ้าจะกำหนดรูปร่างของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวรอบรูป 62 เมตร ให้มีพื้นที่มากที่สุดแล้ว นั้น

<u>วิธีทำ</u>



พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว

$$y = x(31-x)$$
$$y = 31x-x^2$$
$$= -(x^2-31x)$$
$$= -(x^2-2(x)(\tfrac{31}{2})+(\tfrac{31}{2})^2-(\tfrac{31}{2})^2)$$
$$= -(x-15.5)^2+(15.5)^2$$
$$= -(x-15.5)^2+240.25$$

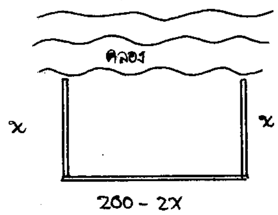
เมื่อ $(h,k) = (15.5, 240.25)$ แสดงว่า ด้านกว้างต้องมีขนาด 15.5 เมตร จะทำให้ได้ -

- พื้นที่มากที่สุด 240.25 ตารางเมตร <u>ตอบ</u>

3) ถ้าต้องการหารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวรอบรูปเป็น p หน่วย
จะต้องเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส ถ้า ด้านกว้าง กว้าง x หน่วย
ด้านยาวต้องมีขนาด $\frac{p-2x}{2}$ หน่วย **ตอบ**

4) ต้องการล้อมรั้วที่ดินเพียง 3 ด้าน และด้านทั้งสามเป็นส่วนหนึ่งของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ถ้าวัสดุที่ใช้ทำรั้ว ยาว 200 m และเขาอยากได้พื้นที่ภายในรั้วมากที่สุด แล้ว

วิธีทำ



พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว

$$
\begin{aligned}
y &= x(200-2x) \\
y &= 200x - 2x^2 \\
&= -2(x^2 - 100x) \\
&= -2(x^2 - 2(x)(50) + 50^2 - 50^2) \\
&= -2(x-50)^2 + 5{,}000
\end{aligned}
$$

$(h,k) = (50, 5{,}000)$

นั่นหมายความว่า ถ้าล้อมรั้ว ด้วยความกว้าง 50 เมตร และความยาว $200 - 2x = 200 - 2(50) = 100$ เมตร
แล้ว จะได้พื้นที่ภายในรั้วมากที่สุด และเท่ากับ 5,000 ตารางเมตร **ตอบ**

จบไปแล้วครับ สำหรับบทที่ 4 พาราโบลา
จะเห็นว่า บทนี้ไม่ง่ายเลย และมีรายละเอียดเยอะมาก ๆ
ซึ่งนั่น ทำให้หลาย ๆ คน เรียนบทนี้ไม่เข้าใจ และทำให้เกิดอาการไม่ชอบคณิตศาสตร์เอาดื้อ ๆ
จริง ๆ แล้ว ถ้าลองอ่านให้ดี จะพบว่า

- พี่ได้เขียนอธิบายไว้ทุกหัวข้อ และทุกวิธีการทำ
- แต่ละแบบฝึกหัด และวิธีการทำ จะเกี่ยวเนื่องกับข้อก่อนหน้านั้น
- อีกทั้งในแต่ละหัวข้อ พี่ได้เขียนไว้ค่อนข้างละเอียดมาก ๆ

จึงขอให้ทุกคนลองทำแบบฝึกหัดดูให้เข้าใจ เพื่อให้สามารถทำความเข้าใจ Parabola ได้อย่างถ่องแท้

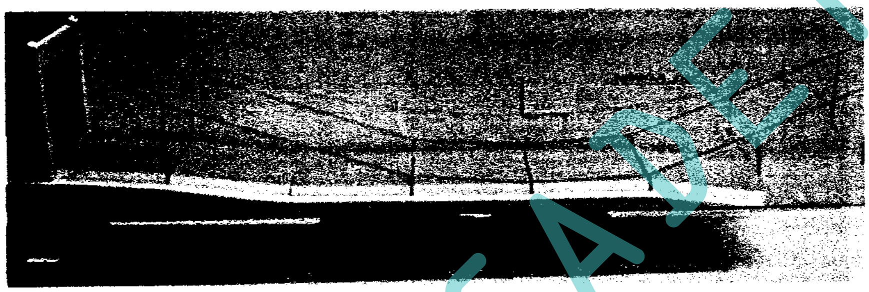
อ่านไม่เข้าใจ สามารถโทรมาสอบถามได้ ตามเบอร์โทรศัพท์ ใน Website ครับ

พี่แซท

note เรียนรู้คำศัพท์ ในบทที่ 4

พาราโบลา	Parabola
แกนสมมาตร	Axis of Symmetry
จุดสูงสุด	Maximum Point
จุดต่ำสุด	Minimum Point

สะพานแขวน



นักเรียนอาจเคยเห็นสะพานแขวนมาแล้ว สะพานแขวนประกอบด้วยสายเคเบิ้ลใหญ่ที่โยงด้านบนระหว่างเสาสะพานที่ตั้งอยู่ที่ปลายทั้งสองข้างของสะพานข้างละสองต้น พื้นสะพานแขวนไว้กับสายเคเบิ้ลใหญ่ สายเคเบิ้ลใหญ่จะมีทิศทางเปลี่ยนไปจากเดิม ณ จุดแขวนแต่ละจุด เพื่อทำให้สายเคเบิ้ลใหญ่สามารถรับน้ำหนักของสะพานและน้ำหนักที่บรรทุกได้ โดยแต่ละจุดแขวนเฉลี่ยรับน้ำหนักเท่ากัน วิศวกรผู้สร้างสะพานจะคำนวณน้ำหนักของสะพานและน้ำหนักที่บรรทุกเฉลี่ยให้เท่ากันหมดที่จุดแขวนทุกจุด ซึ่งทำให้การเปลี่ยนของทิศทางของสายเคเบิ้ลใหญ่ เป็นมุมขนาดเดียวกันหมดและจุดแขวนเหล่านั้นจะเรียงกันเป็นลักษณะพาราโบลาหงายบนสายเคเบิ้ลใหญ่

วิศวกรผู้สร้างสะพานใช้สมการของพาราโบลาในการคำนวณเกี่ยวกับแรงต่าง ๆ ที่กระทำกับสะพาน