บทที่ 5
พื้นที่ผิว และปริมาตร

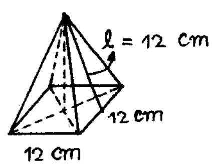
5.1 พื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม

> พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง
>
> โดยที่ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด ที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
>
> มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ × ความยาวรอบรูปของฐาน × สูงเอียง

แบบฝึกหัด 5.1 ก

1. จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจตุรัส ซึ่งมีฐานยาวด้านละ 12 cm ส่วนสูงเอียง ยาว 12 cm

วิธีทำ



พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

โดย พื้นที่ฐาน = กว้าง × ยาว = $12 \times 12 = 144$ cm^2

และ พื้นที่ผิวข้าง $= \frac{1}{2} \times (4 \times 12) \times \ell$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times (4 \times 12) \times \cancel{12}^{6}$

$= 24 \times 12 = 288$ cm^2

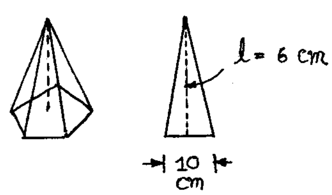
ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$= 144 + 288$

$= 432$ cm^2 **ตอบ**

2. จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิด ฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ฐานยาวด้านละ 10 cm และมีส่วนสูงเอียงยาว 6 cm

วิธีทำ



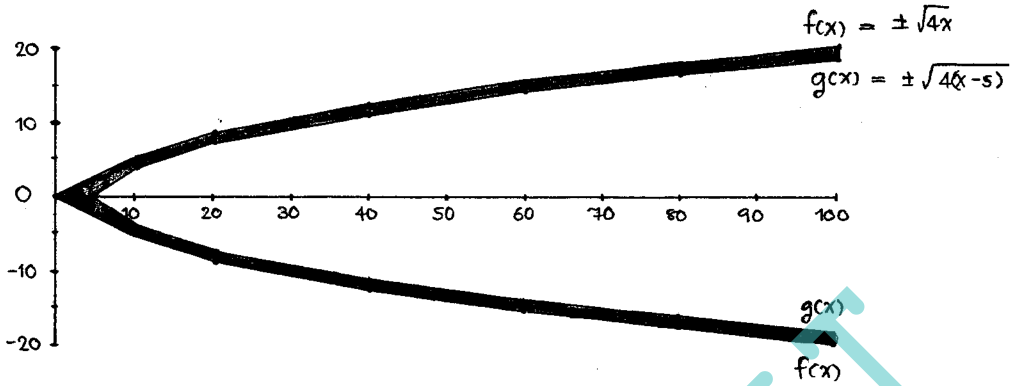
พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด = $\frac{1}{2}$ × ความยาวรอบรูปของฐาน × สูงเอียง

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times (5 \times 10) \times \cancel{6}^{3}$

$= 150$ cm^2 **ตอบ**

note : แต่ละมุมของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยม มีขนาด $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

เมื่อนำพิกัด ของ f(x) และ g(x) มาเขียนกราฟ จะได้รูปกราฟ ดังนี้



เราสามารถหาปริมาตรส่วนที่เหลือได้ จาก การทำ Integration ดังนี้ ;

$$V = \int_a^b \left(\pi (f(x))^2 - \pi (g(x))^2 \right) dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx - \pi \int_a^b g(x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^{100} (\pm\sqrt{4x})^2\, dx - \pi \int_0^{100} (\pm\sqrt{4(5-x)})\, dx$$

$$= \pi \int_0^{100} 4x\, dx - \pi \int_0^{100} (20-4x)\, dx = 4\pi \int_0^{100} x\, dx - \pi \left[\int_0^{100} 20\, dx - 4\int_0^{100} x\, dx \right]$$

$$= 4\pi \frac{x^2}{2} \Big]_0^{100} - \pi \left[20x \Big]_0^{100} - \frac{4x^2}{2} \Big]_0^{100} \right]$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}\pi}{\cancel{2}_{1}} (100^2 - 0^2) - \pi \left[20(100-0) - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} (100^2 - 0^2) \right]$$

$$= 2\pi (10{,}000) - \pi [\, 2{,}000 - 20{,}000 \,]$$

$$= 20{,}000\pi - \pi(-18{,}000) = 20{,}000\pi + 18{,}000\pi$$

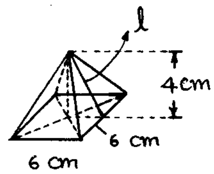
$$= 38{,}000\pi \quad cm^3$$

หรือ $3.8\pi \times 10^{-2}$ m^3 นั่นเอง

ตอบ

3. พีระมิดทำด้วยไม้อันหนึ่ง มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 cm และพีระมิดสูง 4 cm ถ้าต้องการทาสีพื้นผิวของพีระมิดนี้ บริเวณที่ทาสีมีพื้นที่กี่ cm^2

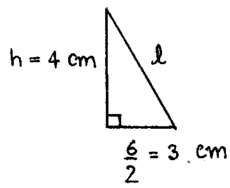
<u>วิธีทำ</u>



การจะหาพื้นที่ผิวข้าง ต้องทราบสูงเอียง หรือ l

เมื่อ $l^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

$\therefore \quad l = \sqrt{25} = 5$ cm



ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้างทั้ง 4 ด้าน

$= (6 \times 6) + \cancel{4}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times 6 \times 5\right)$

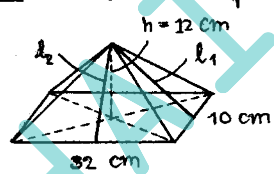
$= 36 + 60$

$= 96 \ cm^2$ <u>ตอบ</u>

★ 4. จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉาก ยาว 32 cm และ 10 cm และมีความสูง 12 cm

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เป็นข้อแรกที่พื้นที่ฐานของพีระมิด ไม่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะทำให้ ความสูงเอียง ของด้านกว้าง (l_1) และ ความสูงเอียงของด้านยาว (l_2) ไม่เท่ากัน

<u>note</u> ให้ l_1 แทนความสูงเอียง ด้านกว้าง และ l_2 แทนความสูงเอียงด้านยาว



จากมุมมองภาพ 3 มิติ

พิจารณา l_1 ; $l_1^2 = h^2 + 16^2$

$l_1^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$

$l_1 = \sqrt{400} = 20$ cm

พิจารณา l_2 ; $l_2^2 = h^2 + 5^2 = 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169$

$l_2 = \sqrt{169} = 13$ cm

$\therefore$ พื้นที่ผิวด้านกว้าง 2 ข้าง $= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times (10) \times l_1\right) = 10 l_1 = 10(20) = 200 \ cm^2$

พื้นที่ผิวด้านยาว 2 ข้าง $= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 32 \times l_2\right) = 32 l_2 = 32(13) = 416 \ cm^2$

พื้นที่ฐาน = กว้าง × ยาว = $10 \times 32 = 320 \ cm^2$

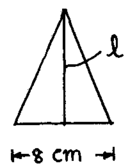
ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมด $= 200 + 416 + 320 = 936 \ cm^2$ <u>ตอบ</u>

5. พีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ฐานยาวด้านละ 8 cm และมีพื้นที่ผิวข้าง 120 cm^2 จะมีสูงเอียงเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาทีละขั้น นะครับ

พื้นที่ผิวข้าง 5 ด้าน รวมกันเท่ากับ 120 cm^2

$\therefore$ พื้นที่ผิวข้าง 1 ด้าน มีค่าเท่ากับ $\frac{120 \times 1}{5} = 24$ cm^2



พื้นที่ผิวข้าง 1 ด้าน คือ 24 cm^2 $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$24 = \frac{1}{2} \times \cancel{8}^{4} \times \ell$

$\ell = \frac{24}{4} = 6$ cm

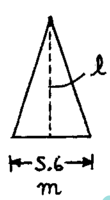
ดังนั้น พีระมิด มีสูงเอียงเท่ากับ 6 cm <u>ตอบ</u>

6. พีระมิดฐานสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า วัดความยาวรอบฐานได้ 56 m (= 560 cm) และมีพื้นที่ผิวข้าง 224 m^2 ส่วนสูงเอียงของพีระมิดยาวเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก โจทย์กำหนดหน่วยความยาวเป็นหน่วย เมตร (m)

และ เพราะเป็นพีระมิดฐานสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ความยาวรอบฐานรวม 56 m

$\therefore$ ความยาว 1 ด้านของฐาน $= \frac{56}{10} = 5.6$ m



เมื่อพิจารณาพื้นที่ผิวข้างรวมของพีระมิด = 224 m^2

$\therefore$ พื้นที่ ผิวข้างด้านเดียว = 224 / 10 = 22.4 m^2

ทำให้สามารถหาค่าความสูงเอียง (ℓ) ได้จาก $24.4 = \frac{1}{2} \times 5.6 \times \ell$

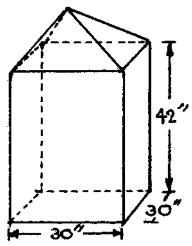
$\therefore \ell = \frac{2 \times 22.4}{5.6} = \frac{\cancel{2}^{1} \times 224}{\cancel{56}_{28}} = \frac{\cancel{224}^{56^{8}}}{\cancel{28}_{7_{1}}} = 8$

ดังนั้น พีระมิด มีส่วนสูงเอียง เท่ากับ 8 m <u>ตอบ</u>

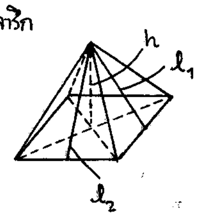
๗. รูปจำลองศิลาจารึกมีส่วนล่างเป็นปริซึมสี่เหลี่ยมจตุรัส ส่วนบนเป็นพีระมิด ดังรูป ฐานทั้งสองเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ยาวด้านละ 30 นิ้ว และมีปริมาตรทั้งหมด 40, 200 ลูกบาศก์นิ้ว ถ้าส่วนล่างสูง 42 นิ้ว จงหา

1) สูงเอียง ของ พีระมิด

2) พื้นที่ผิวทั้งหมด ของศิลาจารึก



พิจารณาเฉพาะ พีระมิด



<u>note</u>: เนื่องจากเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม-จตุรัส ดังนั้น $l_1 = l_2$

<u>วิธีทำ</u>

ปริมาตรทั้งหมด = ปริมาตรของปริซึม + ปริมาตรของพีระมิด

∴ ปริมาตรของพีระมิด = ปริมาตรทั้งหมด − ปริมาตรของปริซึม

$= 40,200 - (30 \times 30 \times 42)$

$= 40,200 - 37,800$

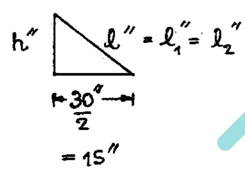
$= 2,400$

เมื่อ ปริมาตรของพีระมิด $= 2,400$ นิ้ว^3 $= \frac{1}{3}($ พื้นที่ฐานพีระมิด $\times$ สูง $)$

$2,400 = \frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{30}^{10} \times 30 \times h)$

∴ สูงตรง หรือ $h = \frac{2,400}{10 \times 30} = \frac{24}{3} = 8$ นิ้ว

1)



พิจารณาสูงเอียง จาก $l^2 = h^2 + 15^2$

$l^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$

$l = \sqrt{289} = 17$ นิ้ว <u>ตอบ</u>

2) พื้นที่ผิวของศิลาจารึก = พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด + พื้นที่ผิวข้างของปริซึม + พื้นที่ฐานของปริซึม

$= \langle \cancel{4}^{2} \times (\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times 30 \times l) \rangle + \langle 4 \times (30 \times 42) \rangle + (30 \times 30)$

$= (2 \times 30 \times 17) + (5,040) + 900$

$= 1,020 + 5,040 + 900$

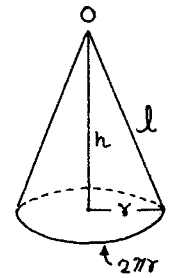
$= 6,960$ นิ้ว^2

ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมดของศิลาจารึก เท่ากับ 6,960 ตารางนิ้ว <u>ตอบ</u>

พื้นที่ผิวของกรวย = $\pi r l + \pi r^2$

เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของกรวย และ

l แทน ความยาวของส่วนสูงเอียงของกรวย



แบบฝึกหัด 5.1 ข

โจทย์กำหนดให้ π มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14

แต่เพื่อความสะดวก จะติดค่า π ไว้ (สำหรับบางข้อ) กรณีที่ คูณ (หรือหาร) ค่า π ไม่ลงตัว และ / หรือ ต้องการแสดง-ความสัมพันธ์ของค่า π

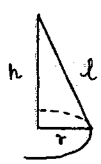
1. จงหาพื้นที่ผิวข้างของกรวยสังกะสีอันหนึ่ง ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง (D) ของฐาน ยาว 10 cm และสูง (h) 12 cm

วิธีทำ พื้นที่ผิวข้างของกรวย $= \pi r l$

เมื่อ $r = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm

และ หาค่า l ได้จาก $l^2 = h^2 + r^2$

$l^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$



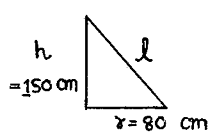
$\therefore \; l = \sqrt{169} = 13$ cm

ทำให้ พื้นที่ผิวข้างของกรวย $= \pi r l = \pi(5)(13)$

$= 65\pi$ cm² ≈ 204.1 cm² ตอบ

2. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่ง ทำกระโจมส่วนล่างเป็นทรงกระบอก มีหลังคาเป็นกรวย
ส่วนที่เป็นทรงกระบอกสูง 120 cm หลังคากระโจมสูง 150 cm รัศมี (r) ของฐานกระโปรง ยาว 80 cm
ถ้าทางโรงเรียนต้องการเขียนลวดลายบนหลังคา จงหาพื้นที่ ที่ต้องการเขียนลวดลาย

วิธีทำ โจทย์ต้องการ เฉพาะพื้นที่ผิวข้างกรวย ซึ่ง $= \pi r l$



จาก $l^2 = h^2 + r^2 = (150)^2 + 80^2$

$l^2 = 22{,}500 + 6{,}400 = 28{,}900$ cm²

$l = \sqrt{28{,}900} = 170$ cm

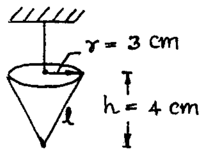
$\therefore$ พื้นที่ผิวข้าง $= \pi r l = \pi(80)(170)$

$= 13{,}600\pi \approx 13{,}600\,(3.14)$

$\approx 42{,}704$ cm² ตอบ

3. ลูกตุ้มเหล็ก มีลักษณะเป็นกรวย มีความสูง 4 cm มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 cm ($\therefore r = \frac{6}{2} = 3$ cm)
ลูกตุ้มนี้ มีพื้นที่ผิว และปริมาตร เป็นเท่าใด

<u>วิธีทำ</u>



หาค่า l จาก $l^2 = h^2 + r^2$

$$l^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\therefore l = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวกรวย = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$$= \pi r^2 + \pi r l$$

$$= \pi r (r + l) = \pi (3)(3+5)$$

$$= 24\pi \text{ cm}^2$$ <u>ตอบ</u>

และปริมาตรกรวย $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \pi (\cancel{3}^{\,3})^{\cancel{2}} (4)$$

$$= 12\pi \text{ cm}^3$$ <u>ตอบ</u>

<u>hint</u> : จะเห็นว่า การแทนค่า ตั้งแต่ต้นจนสุดท้าย เราไม่แทนค่า $\pi \approx \frac{22}{7}$ หรือ 3.14
เพราะ ★ เราต้องการ ดึงตัวประกอบ เพื่อให้ง่ายต่อการแก้สมการ
และ การที่ พื้นที่ผิว = 24π <u>cm²</u> และ ปริมาตร = 12π <u>cm³</u>
★ <u>ไม่ได้แปลว่า พื้นที่ผิว > ปริมาตร (ทั้งๆที่ $24\pi > 12\pi$)</u>
<u>เพราะ มิติของ พื้นที่ คือ 2 มิติ แต่มิติของปริมาตร คือ 3 มิติ เปรียบเทียบกัน-</u>
<u>-ไม่ได้นะครับ เพราะไม่ใช่มิติ เดียวกัน</u>

4. ต้องการทำหมวกกระดาษรูปกรวย ให้มีความยาวรอบฐานหมวก 62.8 cm ส่วนสูงเอียง 30 cm
หมวกแต่ละใบ ต้องใช้กระดาษ อย่างน้อยกี่ cm^2

<u>วิธีทำ</u> สังเกตว่า พื้นที่ผิวข้างของหมวก $= \pi r l$

โจทย์ บอกค่า l มาแล้วว่า $l = 30$ cm
แต่ไม่บอกค่า r ซึ่งเราจะหาค่า r ได้จาก ความยาวรอบฐานหมวก
เพราะ ความยาวรอบฐานหมวก $= 2\pi r = 62.8$ cm

$$\therefore r = \frac{62.8}{2\pi} = \frac{31.4}{\pi} = \frac{31.4}{3.14} = 10 \text{ cm}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้าง $= \pi r l = (3.14)(10)(30) = (3.14)(300) = 942 \text{ cm}^2$

<u>ตอบ</u>

<u>hint</u> : ข้อนี้ ใช้ $\pi \approx 3.14$ ไม่ใช้ $\frac{22}{7}$ เพราะ $\frac{22}{7}$ ทำให้การคำนวณไม่ลงตัว
ซึ่งน้องๆ จะตอบว่า พื้นที่ผิวข้าง $= 300\pi$ ก็ได้

5. หมวกของชาวเวียดนามมีลักษณะเป็นกรวย ถ้าหมวกใบหนึ่ง วัดความยาวเส้นรอบวงของฐานหมวก ($2\pi r$) ได้ 28 cm และสูงเอียง 27 cm จงหาพื้นที่ของหมวก

<u>วิธีทำ</u>

พื้นที่ของหมวก $= \pi r l$ เมื่อ $2\pi r = 28$

$\therefore r = \frac{28}{2\pi} = \frac{14}{\pi}$ cm

$= \pi\left(\frac{14}{\pi}\right)(27)$

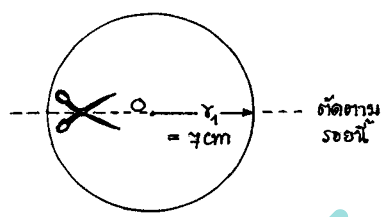
$= 14 \times 27$

$= 378$ cm^2 <u>ตอบ</u>

<u>hint</u> : สังเกตว่า นี่ก็เป็นอีกข้อ ที่เราไม่แทนค่า $\pi = \frac{22}{7}$ หรือ 3.14 เพราะสุดท้ายแล้ว จะเกิดการตัดทอนเศษส่วน แล้วทำให้ ค่า π หายไปนั่นเอง

6. ทดสร้างวงกลมบนกระดาษให้มีรัศมี 7 cm และสร้างกรวยจากกระดาษ ครึ่งวงกลมนี้ โดยให้กรวยมีพื้นที่ผิวข้าง - - มากที่สุด จงหาว่า ฐานของกรวย มีรัศมียาวกี่เซนติเมตร และกรวยสูงกี่เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u> ใครบางคนอาจจะสงสัยว่า โจทย์บอกรัศมีวงกลมมาให้แล้ว ทำไมต้องมาหารัศมี (ของกรวย) อีก



โปรดสังเกตว่า เมื่อพับ ครึ่งวงกลม เป็นกรวยแล้ว

ส่วน $r_1 = 7$ cm จะกลายเป็นสูงเอียง (l) ทันที

โดย พื้นที่ ครึ่งวงกลม = พื้นที่ผิวข้างของกรวย

ดังนั้น พื้นที่ครึ่งวงกลม $= \frac{1}{2}\pi r_1^2 = \frac{(7)^2\pi}{2}$ cm^2

และทำให้ $\frac{(7)^2\pi}{2} = \pi r_2 l$ โดย $l = r_1 = 7$ cm นั่นเอง

หรือ $\pi l (r_2) = \frac{(7)^2\pi}{2}$ ทำให้ $r_2 = \frac{\frac{(7)^2\pi}{2}}{\pi(7)} = \frac{7}{2}$ cm

เมื่อ r_2 หรือ รัศมีของฐานกรวย $= \frac{7}{2}$ cm ดังนั้น หาความสูงของกรวย (h) ได้จาก -ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ;

$$l^2 = h^2 + r_2^2$$

$$7^2 = h^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 7^2 - \frac{7^2}{4} = 7^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3(7)^2}{4}$$

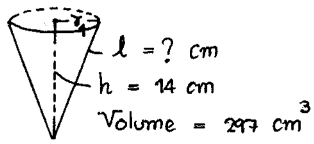
นั่นแสดงว่า $h = \sqrt{\frac{3(7)^2}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx (3.5)(1.732)$

≈ 6.062 cm <u>ตอบ</u>

★ <u>hint</u> : จะเห็นว่า การติดค่า π และตัวเลขยกกำลัง 2 เอาไว้ เช่น $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ หรือ $\frac{3(7)^2}{4}$ จะช่วยเราได้มาก สำหรับการตัด - ทอนเศษส่วน ทำให้เราประหยัดเวลาในการคิด ไปได้มากจริง ๆ

7. ทวีพรต้องการทำกรวยสังกะสี ที่มีความจุ 297 cm^3 มีความสูง 14 cm เขาต้องตัดแผ่นสังกะสี จากแผ่นสังกะสีรูปวงกลม ที่มีรัศมียาวกี่เซนติเมตร และสามารถทำกรวยจากแผ่นวงกลมนี้ได้อย่างมากกี่อัน

<u>วิธีทำ</u>



หารัศมีของกรวย ได้จาก สูตรการหาปริมาตร ;

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2 h = 297$$

$$\frac{1}{3}\pi r_1^2(14) = 297$$

$$r_1^2 = \frac{297 \times 3}{14\pi} = 20.25 \ cm^2$$

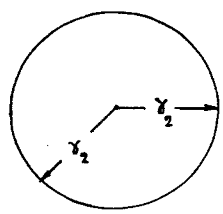
$$\therefore r_1 = \sqrt{20.25} = 4.5 \ cm$$

จึงหาค่า l ได้จาก $l^2 = r_1^2 + h^2$

$$l^2 = (4.5)^2 + 14^2 = 20.25 + 196 = 216.25 \ cm^2$$

$$\therefore l = \sqrt{216.25} = 14.705 \ cm$$

และ ทำให้พื้นที่ผิวข้างของกรวย $= \pi r_1 l = \pi(4.5)(14.705) = 66.17257 \ cm^2$



และสังเกตว่า l ของกรวย คือ r_2 ของวงกลมสังกะสี

ดังนั้น รัศมีของวงกลม $= r_2 = l = 14.705$ cm

และ ทำให้ วงกลมมีพื้นที่ $= \pi r_2^2 = \pi(14.705)^2 \ cm^2$

เมื่อวงกลมตั้งต้นในการทำกรวย มีพื้นที่ $(14.705)^2\pi \ cm^2$

และ กรวย 1 อัน มีพื้นที่ $(66.1725)\pi = (4.5)(14.705)\pi \ cm^2$

ดังนั้น $\dfrac{\text{พื้นที่วงกลม}}{\text{พื้นที่กรวย}} = \dfrac{(14.705)\cancel{(14.705)}\cancel{\pi}}{(4.5)\cancel{(14.705)}\cancel{\pi}} = \dfrac{14.705}{4.5} \approx 3.267$

$\therefore$ พื้นที่วงกลม $=$ 3.27 เท่า ของพื้นผิวด้านข้างของกรวย 1 อัน

แสดงว่า วงกลม 1 วง สามารถตัดเป็นกรวยได้ 3 ชิ้น (ไม่พอสำหรับชิ้นที่ 4

- เพราะ 0.27 คือเศษ จากการหาร)

<u>ตอบ</u>

<u>hint</u> : โจทย์ ข้อนี้ให้ข้อคิด ระหว่าง แก้ปัญหา เยอะมาก ๆ เช่น

- l ของกรวย คือ รัศมี (r_2) ของวงกลม
- เราไม่คูณเลข เพราะต้องการให้เกิดการ ตัดทอนกันของตัวเลข และค่าคงที่ เกิดเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ
- และ คำถามทดสอบความเข้าใจ คือการต้องการทราบว่า วงกลมต้นแบบ จะถูกนำไปสร้างเป็นผิวข้าง ของกรวย-
  -ได้กี่อัน ใช้การเปรียบเทียบอัตราส่วนครับ จะได้ ผลหารคือ คำตอบ & เศษจากการหาร ไม่สามารถนำมา-
  -สร้างกรวยได้เต็มชิ้น ครับ

พื้นที่ผิวของทรงกลม

พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$ เมื่อ r แทนรัศมีของทรงกลม

<u>note</u> : พื้นที่ผิวของวงกลม เป็นปริมาณ 2 มิติ เช่นเดียวกับพื้นที่ผิวของทรงกลม แต่ สูตรการคำนวณต่างกัน โดยที่

พื้นที่ผิวของวงกลม $= \pi r^2$

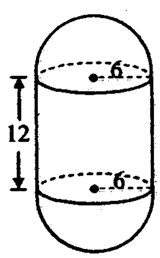
ในขณะที่ พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$

<u>แบบฝึกหัด 5.1 ค</u>

แบบฝึกหัด แต่ละข้อต่อไปนี้ ให้เลือกใช้ค่า π ประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ตามความเหมาะสม

1. จงหาพื้นที่ผิวโดยประมาณของรูปเรขาคณิตสามมิติต่อไปนี้ (กำหนดหน่วยความยาว เป็นเซนติเมตร)

1)



พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม ด้านบน + ด้านล่าง

$= $ พื้นที่ผิวทรงกลมเต็มลูก

$= 4\pi r^2$

พื้นที่ผิวทรงกระบอก $= (2\pi r)\,h$

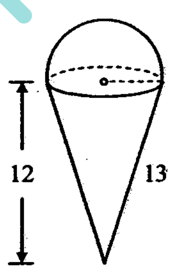
$= 2\pi r(12) = 24\pi r$

ดังนั้น พื้นที่ผิวรวม $=$ พื้นที่ผิวทรงกลม + พื้นที่ผิวทรงกระบอก (เฉพาะผิวข้าง)

$= 4\pi r^2 + 24\pi r = 4\pi r(r+6)$

$= 4\pi(6)(6+6) = 288\pi$ cm^2 <u>ตอบ</u>

2)

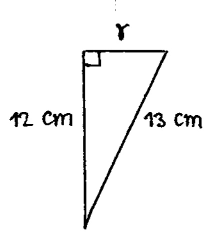


พื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปทรง $=$ พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม + พื้นที่ผิวข้างของ-กรวย

$= \frac{1}{\cancel{2}_1}(\cancel{4}^2\pi r^2) + \pi r l$

$= \pi r(2r + l) = \pi(5)(2(5)+13)$

$= 115\pi$ cm^2



จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ;

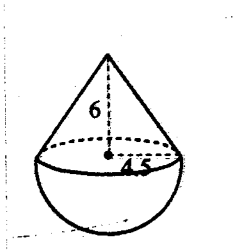
$13^2 = r^2 + 12^2$

$r^2 = 13^2 - 12^2 = (13+12)(13-12) = 25$

$r = \sqrt{25} = 5$ cm

<u>ตอบ</u>

3)



พื้นที่ผิวของรูปทรง = พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม + พื้นที่ผิวข้างของกรวย

$= \frac{1}{2}(4\pi r^2) + \pi r l$

$= \pi r(2r + l)$

$= \pi(4.5)(2(4.5) + 7.5)$

$= \pi(4.5)(16.5)$

$= 74.25\pi$

$\approx 233.145 \text{ cm}^2$ **ตอบ**

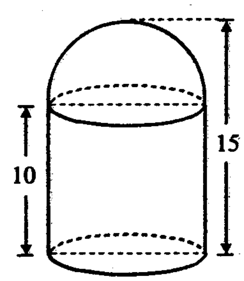
พิจารณา ส่วนตัดของกรวย รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ;

$l^2 = 6^2 + (4.5)^2$

$= 36 + 20.25 = 56.25$

$l = \sqrt{56.25} = 7.5$

4)



พื้นที่ผิวของรูปทรง = พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม + พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก + พื้นที่ฐานของทรงกระบอก

$= \frac{1}{2}(4\pi r^2) + (2\pi r h) + (\pi r^2)$

$= \pi r(2r + 2h + r) = \pi r(3r + 2h)$

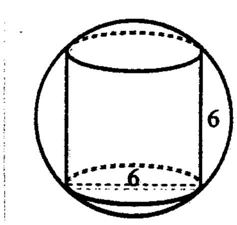
$= \pi(5)(3(5) + 2(10))$

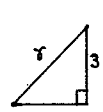
$= 175\pi$ หรือ $= 175 \times \frac{22}{7} = 330 \text{ cm}^2$ **ตอบ**

note : ข้อนี้ เราแทนค่า $\pi = \frac{22}{7}$ เนื่องจากเกิดความลงตัวในการตัดทอน เศษ / ส่วน

2. ทรงกระบอก มีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน ซึ่งเท่ากับ 6 cm แนบในวงกลมได้พอดี ดังรูป จงหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของทรงกลม

วิธีทำ





จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ; หาค่า รัศมี (r) ของทรงกลมได้

จาก $(r_1)^2 = 3^2 + 3^2 = 2(3)^2$

$\therefore r_1 = \sqrt{2(3)^2} = 3\sqrt{2}$ cm

จะได้พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2 = 4\pi(r_1)^2$

$= 4\pi(3\sqrt{2})^2 = 72\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$

และได้ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{2})^3$

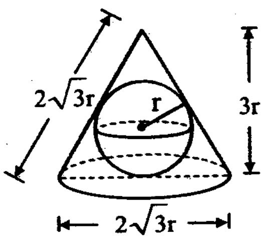
$= \frac{4}{3}\pi(27 \times 2\sqrt{2}) = 72\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$ **ตอบ**

3. ทรงกลมไม้ลูกหนึ่ง แนบในกรวยพลาสติกใส โดยที่ผิวของทรงกลม สัมผัสกับฐาน และผิวข้างของกรวยได้พอดี ถ้ากำหนดความยาวของทรงกลม และกรวยให้ ดังรูป (หน่วยเป็นเซนติเมตร) จงหา

1) อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของทรงกลม ต่อพื้นที่ผิวของกรวย

2) อัตราส่วนของปริมาตร ของทรงกลม ต่อปริมาตรของกรวย

<ins>วิธีทำ</ins> 1) พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$



พื้นที่ผิวของกรวย = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฐาน

$= \pi r l + \pi r^2$ โดย $l = 2\sqrt{3}r$

$= \pi r(l + r) = \pi r(2\sqrt{3}r + 1r)$

$= (2\sqrt{3}+1)(r)\pi r = (2\sqrt{3}+1)\pi r^2$

ดังนั้น $\dfrac{\text{พื้นที่ผิวของทรงกลม}}{\text{พื้นที่ผิวของกรวย}} = \dfrac{4\cancel{\pi r^2}}{(2\sqrt{3}+1)\cancel{\pi r^2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}+1}$

หรือ พื้นที่ผิวของทรงกลม $= \dfrac{4}{2\sqrt{3}+1}$ ของ พื้นที่ผิวของกรวย ≈ 0.896 เท่าของพื้นที่ผิวกรวย

<ins>note</ins>: $2\sqrt{3}+1 \neq 3\sqrt{3}$

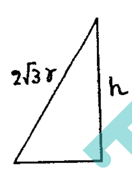
เพราะ $2\sqrt{3}+1 \approx 2(1.732)+1 \approx 3.464+1 \approx 4.464$

แต่ $3\sqrt{3} \approx 3(1.732) \approx 5.196$

โดย $4.464 \neq 5.196$

2) ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}(\pi r^2 h) = \frac{1}{\cancel{3}}\pi r^2(\cancel{3}r) = \pi r^3$



$\frac{2\sqrt{3}r}{2}$

$= \sqrt{3}r$

ดังนั้น $\dfrac{\text{ปริมาตรของทรงกลม}}{\text{ปริมาตรของกรวย}} = \dfrac{\frac{4}{3}\cancel{\pi r^3}}{\cancel{\pi r^3}} = \dfrac{4}{3}$

หรือ กล่าวได้ว่า ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}$ ของ ปริมาตรของกรวย

โดย $(2\sqrt{3}r)^2 = h^2 + (\sqrt{3}r)^2$

$12r^2 - 3r^2 = h^2$

$h^2 = 9r^2$

$\therefore h = \sqrt{9r^2} = 3r$ cm

หรือ อาจใช้ $h = 3r$ จากรูปที่โจทย์กำหนดให้ ก็ได้

4. โลก มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวประมาณ 12,640 กิโลเมตร ผิวโลกส่วนที่ปกคลุมด้วยน้ำ มีพื้นที่ประมาณ $\frac{3}{4}$ ของพื้นที่ผิวของโลกทั้งหมด จงหา

1) ความยาว รอบเส้นศูนย์สูตร

2) พื้นที่ผิวของโลก ส่วนที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยน้ำ

3) ประเทศไทย มีพื้นที่ประมาณ 513,115 ตารางกิโลเมตร คิดเป็นประมาณเศษส่วนเท่าไร ของพื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่-ถูกปกคลุมด้วยน้ำ

<u>วิธีทำ</u> 1) ความยาว รอบเส้นศูนย์สูตร = ความยาวเส้นรอบวงของโลก

$$= 2\pi r = 2\pi\left(\frac{12,640}{2}\right)$$

$$= 12,640\,\pi$$

$$\approx 39,689.6 \text{ กิโลเมตร}$$

2) พื้นที่ผิวของโลก ส่วนที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยน้ำ $= \frac{1}{4}(4\pi r^2)$

$$= \pi r^2 = \pi(6,320)^2$$

$$= 39,942,400\,\pi$$

$$\approx 125,419,136 \approx 125.42 \text{ ล้าน ตารางกิโลเมตร}$$

3) $\dfrac{\text{พื้นที่ประเทศไทย}}{\text{พื้นผิวโลกที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยน้ำ}} = \dfrac{513,115}{125,419,136} = 4.0912 \times 10^{-3}$ หรือ 0.0041

ดังนั้น พื้นที่ประเทศไทย = 0.0041 เท่า ของ พื้นผิวโลก ที่ไม่ถูกปกคลุมด้วยน้ำ

หรือ คิดเป็น $= \dfrac{513,115}{125,419,136} \times 100 = 0.40912 \approx 0.41\ \%$ <u>ตอบ</u>

5. ลูกบอลพลาสติกลูกหนึ่ง เมื่อเป่าลมเข้าเต็มที่แล้ว รัศมียาว 26 cm ส่วนผิวโค้งที่เป็นพลาสติก มี 3 สีสลับกัน รวมทั้งหมด 9 แถบ แต่ละแถบมีพื้นที่เท่ากัน จงหาพื้นที่ของแต่ละแถบ

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากลูกบอลมี แถบสี 3 สี รวม 9 แถบ

เราจึงพิจารณา แถบ 9 แถบ ว่าแต่ละแถบ มีพื้นที่เท่าใด

โดย พื้นผิวทรงกลม $= 4\pi r^2$

$= 4\pi(26)^2$

$= 2{,}704\ \pi$ cm^2

ผิว ลูกบอล ถูกแบ่งออกเป็น 9 แถบ

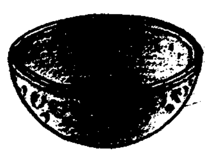
พื้นที่ แถบ 9 แถบ เท่ากับ $2{,}704\ \pi$ cm^2

$\therefore$ พื้นที่ แถบ 1 แถบ เท่ากับ $\frac{2{,}704\pi \times 1}{9} = 300.44\pi$

≈ 944.254 cm^2 <u>ตอบ</u>

6. เสริมศรี ใช้แผ่นเงินมาตี เป็นขันเงินทรงครึ่งทรงกลม ถ้าแผ่นเงินมีพื้นที่ 1,413 cm^2 จะสามารถ ตีเป็นขันเงินใบใหญ่ ที่มีเส้นผ่าน ศูนย์กลาง ยาวมากที่สุด เท่าไร

<u>วิธีทำ</u>



พื้นที่ผิวครึ่งทรงกลม ที่มากที่สุด $= \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

$1{,}413 = 2\pi r^2$

$\therefore\ r^2 = \frac{1{,}413}{2\pi} = \frac{1{,}413}{2 \times 3.14}$

$r^2 = 225$

$\therefore\ r = \sqrt{225} = 15$ cm

ดังนั้น เส้นผ่านศูนย์กลาง ยาว $2r = 30$ cm <u>ตอบ</u>

5.2 การนำไปใช้งาน

<u>แบบฝึกหัด 5.2</u>

แบบฝึกหัด แต่ละข้อ ต่อไปนี้ ให้เลือกใช้ค่า π ประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 ตามความเหมาะสม

1. ตะกั่วกลมสองลูก ลูกหนึ่งมีรัศมี เป็นสองเท่าของรัศมีของอีกลูกหนึ่ง จงหาว่าปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่ เป็นกี่เท่าของปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก

<u>วิธีทำ</u> ให้ตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก มีรัศมี r หน่วย ดังนั้น ปริมาตร $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

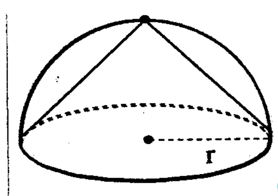
ให้ตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่ มีรัศมี $2r$ หน่วย ดังนั้น ปริมาตร $V_2 = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$

$$= \frac{4}{3}\pi(8)r^3$$

$$= 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

ดังนั้น $\dfrac{\text{ปริมาตรตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่}}{\text{ปริมาตรตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก}} = \dfrac{8\left(\cancel{\frac{4}{3}\pi r^3}\right)}{\cancel{\frac{4}{3}\pi r^3}} = 8$

หรือ ปริมาตรตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่ $= 8$ เท่า ของปริมาตรตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก <u>ตอบ</u>

2. 

จากรูป กรวยแนบในครึ่งทรงกลม มีรัศมียาว r cm ได้พอดี จงหาอัตราส่วนของปริมาตรของครึ่งทรงกลม ต่อปริมาตร ของกรวย

<u>วิธีทำ</u> ปริมาตร ครึ่งทรงกลม $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$

ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h\right)$ โดย ความสูงของกรวย หรือ h มีค่าเท่ากับ r

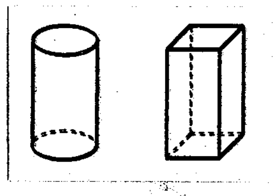
$$= \frac{1}{3}\left(\pi r^2(r)\right) = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$\therefore \dfrac{\text{ปริมาตร ครึ่งทรงกลม}}{\text{ปริมาตรของกรวย}} = \dfrac{\frac{2}{3}\cancel{\pi r^3}}{\frac{1}{3}\cancel{\pi r^3}} = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{1} = 2$

หรือ อาจกล่าวได้ว่า ปริมาตรครึ่งทรงกลม $= 2$ เท่า ของปริมาตรกรวย <u>ตอบ</u>

3. แก้วน้ำ ทรงกระบอก และแก้วน้ำปริซึมสี่เหลี่ยมจตุรัส มีความยาวรอบปากแก้วด้านในเท่ากัน ถ้าแก้วทั้งสองมีความสูงเท่ากันแล้ว แก้วใดจุน้ำได้มากกว่ากัน จงอธิบาย

วิธีทำ



การพิจารณาว่า แก้วใดจุน้ำได้มากกว่ากัน ให้พิจารณาปริมาตรรับน้ำของแก้ว ซึ่งมีค่าเท่ากับ พื้นที่ฐาน × ความสูง

เมื่อพิจารณาความยาวรอบปากแก้วทั้งสองใบแล้ว

พบว่า $2\pi r = 4x$

$r = \frac{4x}{2\pi} = \frac{2x}{\pi}$ หน่วย

ทำให้ ปริมาตรแก้วทรงกลม = พื้นที่ฐาน × สูง

$= (\pi r^2)h = \pi\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 h = \frac{\cancel{\pi}(4x^2)}{\cancel{\pi}\pi} h$

$= \frac{4}{\pi}hx^2$ โดย $\frac{4}{\pi} \approx \frac{4}{3.14} \approx 1.2727$ ลบ.หน่วย

และ ปริมาตรแก้วปริซึม = พื้นที่ฐาน × สูง

$= x^2 h = hx^2$ ลบ.หน่วย

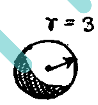
เมื่อปริมาตรแก้วทรงกลม $= \frac{4}{\pi}hx^2 \approx 1.273\,hx^2$

และ ปริมาตรแก้วปริซึม $= hx^2$ ลบ.หน่วย

ดังนั้น ปริมาตรแก้วทรงกลม > ปริมาตรแก้วปริซึม ตอบ

4. ถ้านำลูกตุ้มเหล็กทรงกลม รัศมี 3 cm จำนวน 5 ลูก มาหลอมเป็นกรวยที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานกรวย ยาว 6 cm และสูง 6 cm จะได้กรวยเหล็กกี่ลูก

วิธีทำ



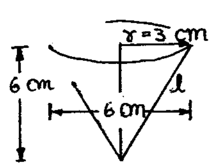
× 5 + <heat> =

โลหะเหลว

แล้วนำ โลหะเหลว + กระบวนการขึ้นรูป = กรวยโลหะ จำนวน n ชิ้น
+ เศษที่เหลือ จากการหลอมขึ้นรูป

ปริมาตร ลูกเหล็กกลม 5 ลูก $= 5\times\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 5\times\left(\frac{4}{\cancel{3}}\pi(\cancel{3})^3\right) = 180\pi$ cm^3

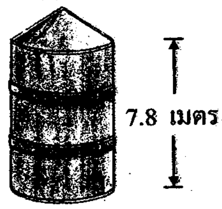
แล้วนำ น้ำเหล็ก ปริมาตร 180π cm^3 มาหลอมขึ้นรูป เป็นกรวยโลหะ



ปริมาตรกรวยโลหะแต่ละอัน $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{\cancel{3}}\pi(3)^{\cancel{2}}(6) = 18\pi$ cm^3

ดังนั้น จะสามารถทำกรวยโลหะได้ $\frac{180\pi}{18\pi} = 10$ แท่ง ตอบ

5. ถังเก็บน้ำมันใบหนึ่ง มีลักษณะดังรูป มีรัศมีของฐานทรงกระบอก ยาว 2.1 m สูง 7.8 m ส่วนที่เป็นกรวยสูง 2.4 m จงหาว่า ถังใบนี้จุน้ำมันได้กี่บาร์เรล (1 บาร์เรล ≈ 159 ลิตร)



วิธีทำ

ปริมาตรถังเก็บน้ำมัน = ปริมาตรถังทรงกระบอก + ปริมาตรกรวยที่ส่วนยอด

$$= (\pi r^2)h_1 + \frac{1}{3}(\pi r^2)h_2$$

$$= \pi(2.1)^2\left[h_1 + \frac{h_2}{3}\right]$$

$$= 4.41\pi\left(7.8 + \cancel{\frac{2.4}{3}}^{\,0.8}\right) = (4.41)(8.6)\pi$$

$$= (37.926)\times\frac{22}{7} = 119.196 \quad m^3$$

โดย $1 \ m^3 = (100\ cm)\times(100\ cm)\times(100\ cm) = 10^6 \ cm^3$

$\therefore \ 119.196 \ m^3 = 119.196\times10^6 \ cm^3$

และ $1000 \ cm^3 = 1$ ลิตร

$\therefore \ 119.196\times10^6 \ cm^3 = \frac{119.196\times10^6}{10^3}\times 1 = 119.196\times10^3$ ลิตร

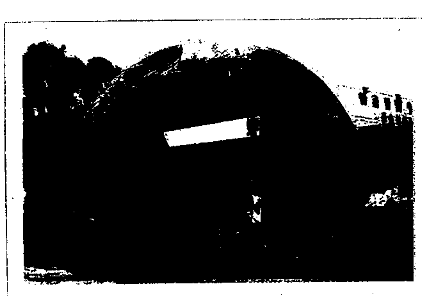
และ เนื่องจาก 159 ลิตร เท่ากับประมาณ 1 บาร์เรล

ดังนั้น 119.196×10^3 ลิตร เท่ากับประมาณ $\frac{119.196\times10^3}{159} = 749.66$ บาร์เรล

หรือ ประมาณ 750 บาร์เรล **ตอบ**

6. ห้องดูดาวของท้องฟ้าจำลองกรุงเทพฯ มียอดโดมเป็นครึ่งทรงกลม มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของส่วนโดม ยาว 20.6 m ฐานโดมเป็นทรงกระบอก สูง 3 m จงหาพื้นที่ผิวภายใน เฉพาะส่วนที่เป็นยอดโดม

วิธีทำ



พิจารณายอดโดมครึ่งทรงกลม มี $r = 20.6$ m

ดังนั้น พื้นที่ผิวภายในยอดโดม $= \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

$$= 2\pi(20.6)^2$$

$$= 848.72\pi$$

$$\approx 2667.406 \quad m^2$$

ตอบ

๗. แก้วน้ำทรงกระบอกใบหนึ่ง มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 10 cm ใส่น้ำสูง 5 cm ถ้านำลูกแก้วซึ่งมีรัศมี 0.5 cm จำนวน 60 ลูก ใส่ลงในแก้วใบนี้ จะทำให้ระดับน้ำสูงขึ้นอีกเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของระดับน้ำ เกิดจากปริมาตรของลูกแก้วที่ถูกใส่ลงไปในน้ำ และพิจารณาได้ จากการวัดความสูงของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้นในแก้ว x พื้นที่ฐานของแก้ว ซึ่งต้องเท่ากับ ปริมาตรรวมของลูกแก้ว ที่ใส่ลงไปในน้ำ

ปริมาตรของลูกแก้ว 60 ลูก $= \overset{20}{\cancel{60}} \times \left(\frac{4}{\cancel{3}}\pi r^3\right)$

$= 80\pi(0.5)^3 = (80\times 0.125)\pi$

$= 10\pi$ cm^3

ดังนั้น ปริมาตรของน้ำที่เพิ่มขึ้น ; $\pi(5)^2 h$ = ปริมาตรลูกแก้วกลม 60 ลูก

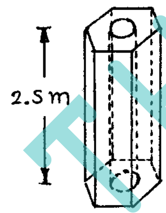
$25\pi h = 10\pi$

$\therefore \quad h = \frac{\overset{2}{\cancel{10\pi}}}{\underset{5}{\cancel{25\pi}}} = \frac{2}{5}$ cm

ดังนั้น ระดับน้ำจะสูงขึ้นไปได้ $\frac{2}{5}$ cm หรือ 0.4 cm <u>ตอบ</u>

๘. เสาเข็มคอนกรีต มีลักษณะเป็นปริซึม 6 เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า แต่ละด้านของฐานยาว 8 cm เสาเข็มยาว 2.5 m เสาเข็มมีรูกลวงตลอดเสา ลักษณะเป็นทรงกระบอก ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 3 cm จงหาปริมาตรของคอนกรีตที่ใช้ทำเสาเข็มต้นนี้

<u>วิธีทำ</u>



ปริมาตรคอนกรีตที่ใช้ทำเสาเข็ม = ปริมาตรของปริซึมฐาน 6 เหลี่ยม − ปริมาตรของทรงกระบอกตรงกลาง รัศมี 3 cm

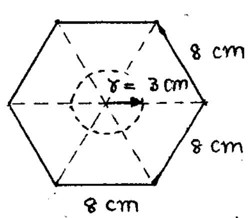
$= (96\sqrt{3} \times 250) - (\pi(3)^2 \times (250))$

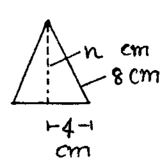
$= 250(96\sqrt{3} - 9(3.14)) = 250(138.012)$

$= 34,503$ cm^3 <u>ตอบ</u>

(ดูการหาพื้นที่ของหกเหลี่ยมด้านเท่า จากวิธีทางด้านซ้าย)

<u>note</u>:





หาค่า h จากทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

; $8^2 = h^2 + 4^2$

$\therefore \quad h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

$h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

ดังนั้น พื้นที่ 6 เหลี่ยมด้านเท่า $= 6 \times \left(\frac{1}{2}(8)(4\sqrt{3})\right) = 96\sqrt{3}$ cm^2

9. ขณะที่น้ำแข็งลอยอยู่ในน้ำ $\frac{1}{8}$ ของปริมาตรของน้ำแข็งจะอยู่เหนือระดับน้ำ น้ำแข็งก้อนหนึ่งมีปริมาตร 2,112 cm^3 ถ้าใส่ลงใน cooler น้ำทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 28 cm และมีความลึก 40 cm จงหาว่าจะต้องใส่น้ำไว้ใน cooler ให้ระดับน้ำต่ำกว่าปากขอบ cooler อย่างน้อยกี่ cm จึงจะไม่ทำให้น้ำใน cooler ล้นออกมา

<u>วิธีทำ</u> ถ้า $\frac{1}{8}$ ของปริมาตรของน้ำแข็งลอยอยู่เหนือน้ำ

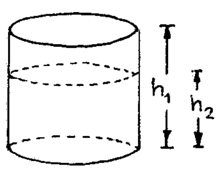
ทำให้ น้ำแข็งจมน้ำ $\frac{7}{8} \times 2,112 = 1,848 \quad cm^3$

พิจารณาปริมาตรรับน้ำใน cooler

$$= \pi r^2 h_1$$
$$= \pi (14)^2 (40)$$
$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{14}^{2} \times 14 \times 40$$
$$= 24,640 \quad cm^3$$

ดังนั้น จะต้องมีน้ำใน cooler ไม่เกินปริมาตร $= 24,640 - 1,848$
$$= 22,792 \quad cm^3$$

โดยปริมาตรน้ำ 22,792 cm^3 $= \pi r^2 h_2$



$$\therefore \quad h_2 = \frac{22,792}{\pi r^2} = \frac{22,792 \times \cancel{7}^1}{22 \times 14 \times \cancel{14}\,2}$$
$$= \frac{22,792}{22 \times 28} = 37 \quad cm$$

ดังนั้น ระดับน้ำต้องต่ำกว่าปากขอบ cooler อย่างน้อย $40 - 37 = 3$ cm น้ำจึงจะไม่ล้นออกมา

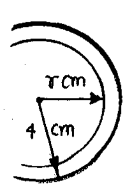
<u>note</u> : ระวังให้ดีนะครับ อย่าไปตอบว่า คำตอบคือ 37 cm เพราะต้องหาความสูงของ cooler - เลขที่เรา-คำนวณได้ มิฉะนั้น จะไม่ตรงกับคำตอบที่เขาต้องการ <u>ตอบ</u>

10. ต้องการนำเหล็กทรงกลมตันที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 cm มาหลอมทำเป็นทรงกลมลูกเล็กที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง ยาว 4 cm จำนวน 49 ลูก ปรากฏว่า มีปริมาตรเหล็กไม่พอ จำเป็นต้องทำเป็นทรงกลมกลวง จงหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของทรงกลมลูกเล็กที่ได้

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาปริมาตรเหล็กทรงกลมตัน D = 14 cm

$$; \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 7^2$$
$$= 1,437.333 \quad cm^3$$

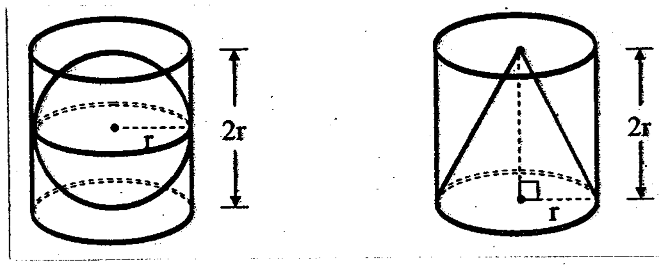
แล้วมาพิจารณาปริมาตรลูกเหล็กทรงกลมกลวง



$$\text{ปริมาตรลูกเหล็กกลวง 49 ลูก} = \frac{4 \times 22 \times 7^2}{3} = 49\left(\frac{4}{3}\pi(4)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)$$
$$\frac{\cancel{4} \times 22 \times \cancel{7^2}}{\cancel{3}} = (\cancel{49}) \times \cancel{\frac{4}{3}}\pi (64 - r^3)$$
$$64 - r^3 = \frac{22}{\pi} = \frac{\cancel{22}}{\cancel{22}} \times 7$$
$$\therefore \quad r^3 = 64 - 7 = 57$$
$$r = \sqrt[3]{57} \approx 3.8485 \quad cm$$

<u>ตอบ</u>

<u>สัมพันธ์กันอย่างไร</u> ?



กำหนดให้ รัศมีของทรงกลม และรัศมีของฐานกรวย เท่ากับรัศมีของฐานของทรงกระบอก ซึ่งเท่ากับ r หน่วย เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม และความสูงของกรวยยาวเท่ากับความสูงของทรงกระบอก ซึ่งเท่ากับ $2r$ หน่วย จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้ทรงกลมและกรวยแนบในทรงกระบอกได้พอดี ดังรูป

แล้ว <u>ตอบคำถามต่อไปนี้</u>

1. ปริมาตรของทรงกระบอก $= (\pi r^2)h = (\pi r^2)(2r) = 2\pi r^3$

2. ปริมาตรทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

   สังเกตว่า ปริมาตรทรงกระบอก $>$ ปริมาตรทรงกลม

   เพราะ $2\pi r^3 > \frac{4}{3}\pi r^3$ จึงทำให้ใส่ทรงกลมในทรงกระบอกได้

3. ปริมาตรกรวย $= \frac{1}{3}(\pi r^2)(2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$

4. เนื่องจาก ปริมาตรทรงกระบอก $= 2\pi r^3$

   ปริมาตรของทรงกลม + ปริมาตรกรวย $= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$

   $= \frac{6}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3$

   $\therefore$ ปริมาตรทรงกระบอก = ปริมาตรทรงกลม + ปริมาตรกรวย

5. อัตราส่วน ของ ปริมาตรกรวย : ปริมาตรทรงกลม : ปริมาตรทรงกระบอก

   $= \frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3$

   $= \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2$

   $= 1 : 2 : 3$

6. พื้นที่ผิวข้างทรงกระบอก $= (2\pi r)h = (2\pi r)(2r) = 4\pi r^2$

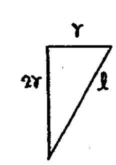
   พื้นที่ฐานด้านบน และด้านล่าง $= 2 \times (\pi r^2) = 2\pi r^2$

   $\therefore$ พื้นที่ผิวรวม $= 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

7. พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$

8. พื้นที่ผิวของกรวย = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฐาน

   $= \pi r l + \pi r^2$ โดย $l = \sqrt{5}r$



   $l = \sqrt{r^2+(2r)^2}$

   $l = \sqrt{5}r$

   $= \pi r(\sqrt{5}r) + \pi r^2$

   $= \sqrt{5}\pi r^2 + \pi r^2$

   $= (\sqrt{5}+1)\pi r^2$

9. อัตราส่วนของ พื้นที่ผิวกรวย : พื้นที่ผิวทรงกลม : พื้นที่ผิวทรงกระบอก

   $= (\sqrt{5}+1)\pi r^2 : 4\pi r^2 : 6\pi r^2$

   $= (\sqrt{5}+1) : 4 : 6$

และ <u>เราสรุปได้ว่า</u> ถ้าฐานของทรงกระบอก และฐานของกรวย มีรัศมีเท่ากับรัศมีของทรงกลม และมีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมแล้ว <u>ปริมาตรของทรงกระบอก จะเท่ากับผลบวกของปริมาตรของกรวย กับปริมาตรของทรงกลม</u>

P. 167

<u>ทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้</u> (คำตอบ อยู่ ต่อจากโจทย์ เลยครับ)

1. กลึง แท่งไม้ทรงกระบอก เส้นผ่านศูนย์กลาง 2 นิ้ว & สูง 2 นิ้ว ให้เป็นทรงกลมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด จะมีเส้นผ่าน-ศูนย์กลาง และปริมาตรเท่าไร

<u>วิธีทำ</u> สังเกตว่า สำหรับแท่งไม้ทรงกระบอกนั้น เส้นผ่านศูนย์กลาง = ความสูง

ดังนั้น เราจะได้ทรงกลม ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 นิ้ว

$r = 1$ นิ้ว

ปริมาตร $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$ ลบ.นิ้ว

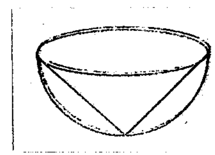
2. จากแท่งไม้ข้อ 1. ถ้านำมากลึงให้เป็นกรวย จะได้กรวยที่มีฐานรูปวงกลม เส้นผ่านศูนย์กลาง = 2 นิ้ว

และมีความสูง = ความสูงทรงกระบอก = 2 นิ้ว

ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}(\pi r^2 h) = \frac{1}{3}(\pi(1)^2(2)) = \frac{2}{3}\pi$ ลบ.นิ้ว

3. กรวยที่ถูกแนบในครึ่งวงกลมได้พอดี

ปริมาตรของครึ่งทรงกลม $= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{4}}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$



ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h\right)$ โดย $h = r$

$= \frac{1}{3}\pi r^2(r) = \frac{1}{3}\pi r^3$

$\therefore$ $\frac{\text{ปริมาตรครึ่งทรงกลม}}{\text{ปริมาตรกรวย}} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{\pi r^3}}{\frac{1}{3}\cancel{\pi r^3}} = \frac{2}{1}$

หรือ กล่าวได้ว่า ปริมาตรครึ่งทรงกลม = 2 เท่าของปริมาตรกรวย

4. ทรงกลมสองลูก ลูกแรกมีรัศมีเป็นสองเท่าของลูกที่สอง

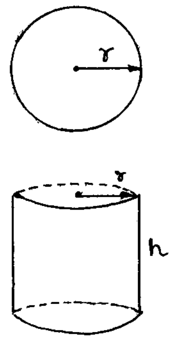
สมมุติ ให้ลูกแรก มีรัศมี $2r$ และลูกที่สองมีรัศมี r

1) $\frac{\text{พื้นที่ผิวทรงกลมลูกใหญ่}}{\text{พื้นที่ผิวทรงกลมลูกเล็ก}} = \frac{\cancel{4\pi}(2r)^2}{\cancel{4\pi}r^2} = \frac{4r^2}{r^2} = 4$

$\therefore$ พื้นที่ผิวทรงกลมลูกใหญ่ = 4 เท่า ของพื้นที่ผิวทรงกลมลูกเล็ก

5. ถ้าวัตถุทรงกลม และทรงกระบอก มีปริมาตรเท่ากัน เส้นผ่านศูนย์กลาง ของทรงกลมยาวเท่ากับเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน - -ทรงกระบอก จงหาว่า ความสูงของทรงกระบอก คิดเป็นเศษส่วนเท่าไร ของความยาว ของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

<u>วิธีทำ</u>



เมื่อ ปริมาตรของทรงกระบอก = ปริมาตรของทรงกลม

$$(\pi r^2)h = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore \quad h = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\cancel{\pi r^2}} = \frac{4}{3}r = \frac{2}{3}(2r) = \frac{2}{3}D$$

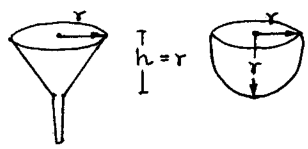
เมื่อ D = Diameter
= เส้นผ่านศูนย์กลาง

เมื่อ $h = \frac{2}{3}D$

ดังนั้น ความสูงของทรงกระบอก = $\frac{2}{3}$ เท่าของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

<u>ตอบ</u>

6. ขันน้ำครึ่งทรงกลม และกรวยกรองน้ำ มีเส้นผ่านศูนย์กลางของปากขัน และปากกรวยเท่ากัน ถ้าความสูงของกรวยกรองน้ำ (ไม่นับส่วนที่ยื่นมาเป็นทรงกระบอก) เท่ากับรัศมีของขันน้ำ อยากทราบว่า ขันน้ำจุน้ำได้เป็นกี่เท่าของกรวยกรองน้ำ



<u>วิธีทำ</u> ปริมาตรของขันน้ำ $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$

ปริมาตรของกรวยกรองน้ำ $= \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi r^2)(r) = \frac{1}{3}\pi r^3$

ดังนั้น ปริมาตรขันน้ำครึ่งทรงกลม : ปริมาตรกรวย $= \frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{1}{3}\pi r^3$

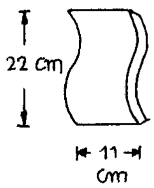
$= 2 : 1$

หรือ กล่าวได้ว่า ปริมาตรขันน้ำครึ่งทรงกลม = 2 เท่าของปริมาตรกรวย <u>ตอบ</u>

P. 168 - 170 ทำได้ง่ายดี

เป็นการประยุกต์ วิธีการหาปริมาตรรูปทรงต่างๆ จากวิธีคิดแบบตรงๆ ให้เป็นวิธีคิดที่ง่าย และรวดเร็วขึ้น

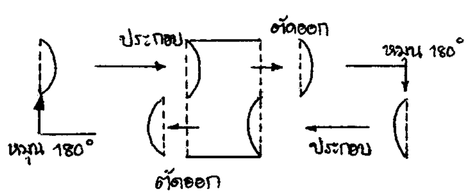
P. 170 อิฐ Block ปูพื้น



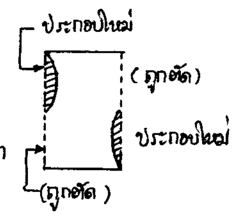
ถ้าหากต้องการซื้ออิฐ Block มาปูพื้นลานหน้าบ้านในบริเวณ กว้าง 3.3 m ยาว 4.4 m อิฐแต่ละก้อนมีขนาดกว้าง 11 cm ยาว 22 cm หนา 8 cm หนักประมาณ 4.2 kg

สังเกตว่า ตั้งแต่เราเรียนมา เรายังไม่เคยเห็นสูตรการหาปริมาตรของรูปทรงรูปร่างแบบนี้ 

แต่ หากทำการตัด / ต่อแล้ว จะพบว่า



ดังนั้น ปริมาตรใหม่ จึงมีรูปร่างเป็น สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความหนา (ปริซึม) ดังนี้



1) ปริมาตรของอิฐ Block 1 ก้อน จึงเท่ากับ $11 \times 22 \times 8 = 1{,}936 \text{ cm}^3$

2) การเรียงอิฐ Block ในพื้นที่ กว้าง 3.3 m (หรือ 330 cm), ยาว 4.4 (หรือ 440 m)

หรือ คิดเป็นพื้นที่ $= 330 \times 440 = 145{,}200 \text{ cm}^2$

อิฐ Block 1 ก้อน มีพื้นที่ $11 \times 22 = 242 \text{ cm}^2$

$\therefore$ ต้องใช้ อิฐ Block $= \frac{145{,}200}{242} = 600$ ก้อน

3) น้ำหนักอิฐ Block ทั้งหมด $= 600 \times 4.2 = 2{,}520$ kg $= 2.52$ Tons ตอบ

ปริมาตร และความหนาแน่น

เนื่องจาก วัสดุบางชิ้น มีรูปทรงของปริมาตรที่เราไม่สามารถใช้รูปทรงเรขาคณิตมาประยุกต์ในการหาปริมาตรได้ ดังนั้น เราจึง -ใช้หลักการ การแทนที่น้ำ หากกำหนดให้ ความหนาแน่น (density) ของน้ำ $= 1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ แล้ว หากวัตถุใด มีความหนาแน่นน้อยกว่าน้ำ วัตถุนั้นจะลอยน้ำ ; หากวัตถุใดมีความหนาแน่นมากกว่าน้ำ วัตถุนั้นจะจมน้ำ

พิจารณาง่ายๆ  ใบไม้ ลอยน้ำ แสดงว่า ความหนาแน่นของใบไม้ $< 10^3 \text{ kg/m}^3$

 ก้อนหินจมน้ำ แสดงว่า ความหนาแน่นของก้อนหิน $> 10^3 \text{ kg/m}^3$

ความหนาแน่น (density) คืออะไร ?

ความหนาแน่น คือ อัตราส่วน ระหว่าง มวล (mass) ต่อปริมาตร (Volume) ของสาร

หรือ $\text{density} = \dfrac{\text{mass}}{\text{Volume}}$

แทนด้วยสัญลักษณ์ทางวิทยาศาสตร์ว่า $\rho = \dfrac{m}{V}$

เมื่อ ρ - density

m - mass

V - volume

เราสามารถพิจารณา density ของสารในสถานะต่างๆ ได้ ดังนี้

สาร	density (kg/m^3)	สาร	density (kg/m^3)
Solid (ของแข็ง)		Liquid (ของเหลว)	
เงิน	10.5×10^3	ปรอท	13.6×10^3
ทอง	19.3×10^3	น้ำทะเล	1.024×10^3
ตะกั่ว	11.3×10^3	* น้ำ (4°C)	1.000×10^3
เหล็ก	7.8×10^3	เอทิลแอลกอฮอล์	0.79×10^3
อลูมิเนียม	2.7×10^3	น้ำมันเบนซิน	0.68×10^3
โซเดียม	0.97×10^3	gas (ก๊าซ)	
ทองแดง	8.97×10^3		
แก้ว	$2.4 - 2.8 \times 10^3$	อากาศ	1.21
คอนกรีต	2.3×10^3	ฮีเลียม	0.179
น้ำแข็ง	0.917×10^3	คาร์บอนไดออกไซด์	1.98
ไม้	$0.3 - 0.9 \times 10^3$		
โฟม	0.1×10^3		

เมื่อนำวัตถุใส่ในภาชนะ ที่บรรจุน้ำไว้เต็ม แล้วน้ำล้นออกมาเท่าใด ปริมาตรของน้ำที่ล้น จะเท่ากับปริมาตรของวัตถุที่จมลงไป ไม่ว่าจะเป็นการจมบางส่วน หรือจมทั้งก้อนวัตถุ ก็ตาม

จากความสัมพันธ์ข้างต้น เราสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้ ดังตัวอย่างหน้า 172 - 174

P. 175 ใช้ข้อมูลจากตารางข้างต้น หาคำตอบในแบบฝึกหัดต่อไปนี้

(จะแสดงวิธีทำไปเลย โดยใช้ข้อมูลที่โจทย์ให้มา และข้อมูลจากตาราง)

1. แท่งแก้วอันหนึ่งหนัก 1.8 kg มีความหนาแน่น (ρ) $= 2.5 \times 10^3$ kg/m^3 หาปริมาตรของแท่งแก้ว

จาก $\rho = \frac{m}{V}$

ดังนั้น $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1.8}{2.5 \times 10^3} = \frac{18}{25} \times 10^{-3}$

$V = 0.72 \times 10^{-3} = 7.2 \times 10^{-4}$ m^3 <u>ตอบ</u>

2. แท่งไม้ทรงลูกบาศก์หนัก 18.9 kg ถ้าไม้มีความหนาแน่น 0.7×10^3 kg/m^3 แท่งไม้นี้มีด้านยาวด้านละกี่ cm

จาก $\rho = \frac{m}{V}$

ดังนั้น $V = \frac{m}{\rho} = \frac{18.9}{0.7 \times 10^3} = 27 \times 10^{-3}$ m^3

เนื่องจาก แท่งไม้เป็นรูปทรงลูกบาศก์ ด้านกว้าง = ด้านยาว = ด้านสูง

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงลูกบาศก์ = ด้าน^3 = 27×10^{-3}

ด้าน^3 = $(3 \times 10^{-1})^3$

$\therefore$ แต่ละด้าน มีความยาว $= 3 \times 10^{-1} = 0.3$ m

$= 30$ cm <u>ตอบ</u>

3. แท่งอลูมิเนียมทรงกระบอก มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 21 cm สูง 10 cm จะหนักประมาณเท่าไร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

จาก $\rho = \frac{m}{V}$

สังเกตว่า โจทย์ต้องการหา m ดังนั้นเราต้องรู้ ρ และ V

ค่า ρ ของอลูมินัม ได้จากตาราง ซึ่ง $\rho_{AL} = 2.7 \times 10^3$ kg/m^3

และหา V ได้จากปริมาตรของทรงกระบอก $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7}\left(\frac{21}{2}\right)^2 (10)$

$= \frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{7}_{1}}\left(\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{2}_{1}}\right)\left(\frac{21}{\cancel{2}_{1}}\right)(\cancel{10}^{5})$

$= 3 \times 5 \times 11 \times 21 = 3{,}465$ cm^3

★ สังเกตว่า ปริมาตร $V = 3,465 \quad cm^3$

โดย $1 \quad m^3 = 10^6 \quad cm^3$

หรือ $10^6 \quad cm^3 = 1 \quad m^3$

$\therefore \quad 3,465 \quad cm^3 = \frac{3,465 \times 1}{10^6} = 3,465 \times 10^{-6} \quad m^3$

★★ ทำไมต้องแปลงหน่วย จาก $cm^3 \rightarrow m^3$

เพราะหน่วย ของ ความหนาแน่น (density, ρ) คือ kg / m^3

ดังนั้น เราต้องใช้หน่วย m^3 (ไม่ใช่ cm^3) ในการคำนวณ

จาก $\rho = \frac{m}{V}$ ดังนั้น $m = \rho V$

$= (2.7 \times 10^3)(3,465 \times 10^{-6})$

$= 9,355.5 \times 10^{-3}$

$= 9.3555 \quad kg$ **ตอบ**

4. ลูกบอลลูนบรรจุก๊าซฮีเลียม (He) $400 \quad m^3$ จงหาว่า ก๊าซที่ บรรจุลงไป หนักกี่กิโลกรัม

จาก $\rho = \frac{m}{V}$ โดย $\rho = 0.179 \quad kg / m^3$

$V = 400 \quad m^3$

ดังนั้น $m = \rho V = (0.179)(400)$

$= 71.6 \quad kg$

note : สังเกตว่า แม้เราจะมองไม่เห็น gas , เราไม่อาจจับต้องได้

แต่ gas ก็มีมวล มีน้ำหนัก ปริมาตร (V) $400 \; m^3$ นั้นใหญ่มาก ๆ

ทำให้ วัดได้ว่า $He_{(g)}$ มีมวลถึง $71.6 \quad kg$ **ตอบ**

5. ชลิต มีโลหะทรงกลมอยู่ 2 ลูก มีเส้นผ่านศูนย์กลาง ยาวเท่ากัน ลูกหนึ่งเป็นตะกั่ว อีกลูกหนึ่งเป็นโลหะ

ทรงกลมลูกใด มีน้ำหนักมากกว่ากัน จงอธิบาย

จากสูตร $\rho = \frac{m}{V}$ จะได้ $m = \rho V$

ดังนั้น $m_{ตะกั่ว} = \rho_{ตะกั่ว} \cdot V_1$ และ $m_{โลหะ} = \rho_{โลหะ} \cdot V_2$

เมื่อโลหะทรงกลม มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากัน ดังนั้น $V_1 = V_2$

$m_{ตะกั่ว} = 11.3 \times 10^3 \, V_1$ และ $m_{โลหะ} = 7.8 \times 10^3 \, V_1$

เมื่อ $11.3 \times 10^3 \, V_1 > 7.8 \times 10^3 \, V_1$ ดังนั้น $m_{ตะกั่ว} > m_{โลหะ}$ **ตอบ**

6. น้ำมันเบนซินผสม สูตร A หนัก 48 kg บรรจุอยู่ในถังน้ำมันทรงกระบอก ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน ยาว 40 cm ระดับน้ำมันในถัง มีความสูง 56 cm จงหา density (กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)

จากสูตร $\rho = \frac{m}{V}$ โดย $m = 48$ kg

$$V = \pi r^2 h$$
$$= (3.14)(20)^2(56) \quad cm^3$$
หรือ
$$= (3.14)(0.20)^2(0.56)$$
$$= 0.070336 \quad m^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{48}{0.070336} = 682.4385805$$
$$\approx 682.44 \quad kg/m^3$$ ตอบ

7. โลหะชนิดหนึ่ง หนัก 17.94 kg เราอยากทราบชนิดของโลหะ จึงนำโลหะไปแทนที่น้ำ ซึ่งบรรจุอยู่ในอ่างทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก กว้าง 25 cm ยาว 40 cm ทำให้ระดับน้ำสูงขึ้น 2 cm

ปริมาตรน้ำที่สูงขึ้น $= 0.25 \times 0.4 \times 0.02$
$= 2 \times 10^{-3} \quad m^3$

$m = 17.94$ kg

ดังนั้น $\rho = \frac{m}{V} = \frac{17.94}{2 \times 10^{-3}} = 8.97 \times 10^3 \quad kg/m^3$

จากตาราง แสดงความหนาแน่น โลหะที่มี $\rho = 8.97 \times 10^3 \; kg/m^3$ คือ <u>ทองแดง</u> ตอบ

8. นักวิเคราะห์ทางเคมีท่านหนึ่ง ได้รับวัตถุก้อนหนึ่ง ซึ่งคาดว่าเป็นโซเดียม เขาชั่งวัตถุนี้ พบว่ามีมวล 145.5 g = 0.1455 kg เมื่อนำไปใส่ในปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ยาว-ด้านละ 10 cm และใส่สารละลายที่ไม่ทำปฏิกิริยากับโซเดียมไว้ ถ้าวัตถุนี้เป็นโซเดียมจะทำให้สารละลาย-ในปริซึมสูงขึ้นเท่าใด

$$\rho_{\text{โซเดียม}} = 0.97 \times 10^3 \quad kg/m^3$$
$$= \frac{m}{V}$$

ดังนั้น $0.97 \times 10^3 = \frac{0.1455}{V}$

$$V = \frac{0.1455}{0.97 \times 10^3} = 0.15 \times 10^{-3} \quad m^3$$

เมื่อ $0.15 \times 10^{-3} \; m^3$ คือปริมาตรส่วนที่สูงขึ้น ของสารละลายในปริซึม

0.15×10^{-3} = พื้นที่ฐาน x สูง $= (0.10)^2 h$

∴ h หรือความสูงที่เพิ่มขึ้นในปริซึม $= \frac{0.15 \times 10^{-3}}{(0.1)^2} = \frac{0.15 \times 10^{-3}}{0.01}$
$= 15 \times 10^{-3} = 1.5 \times 10^{-2} \quad m$
$= 1.5 \quad cm$ ตอบ

<u>ก่อนจบเรื่องนี้</u> ขออธิบายความหมายของ คำศัพท์ 2 ตัว เพื่อความเข้าใจร่วมกัน นะครับ

1. ตามระบบ SI (SI units, Systeme International d' Unites) แล้ว
   กิโลกรัม (kg) ไม่ใช่หน่วยของน้ำหนัก !

   ★ แต่ กิโลกรัม (kg) คือหน่วยของมวล (mass) ซึ่งเป็น 1 ใน 7 ของหน่วยฐานทางวิทยาศาสตร์
   ที่เราไปซื้อของ แล้วแม่ค้าชั่งสินค้าให้เรา แล้วขายโดยคิดราคาตามกิโลกรัมนั้น
   ถ้า ตาชั่ง วัดค่าเป็นกิโลกรัมจริง แสดงว่า " ตาชั่ง ทำหน้าที่ วัดมวล ไม่ใช่วัด น้ำหนัก "

   เพราะ น้ำหนัก เป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งมีทั้งขนาด และทิศทาง

   และ น้ำหนัก = มวล × ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (ของโลก)

   $W = mg$ ซึ่ง สำหรับบริเวณผิวโลกแล้ว $g \approx 9.81\ m/s^2$

นั่นแสดงว่า
- ถ้าต้องการทราบน้ำหนัก ต้องนำมวล (m) ไปคูณกับ ค่า g
- สำหรับบริเวณผิวโลก $g = 9.81\ m/s^2$

  ถ้าห่างจากผิวโลก (หรืออีกนัยหนึ่ง คือห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก) ไปมากเท่าใด
  ค่า g ก็จะลดลง จนถึงความสูงหนึ่ง ($\approx$ 900 km เหนือพื้นโลก)
  ค่า g ก็จะน้อยมาก ๆ จนโลกไม่สามารถดึงดูดวัตถุนั้น ๆ ได้ จุดนั้นคือ อวกาศ (Space)
  ยานอวกาศ จึงเดินทางไปอวกาศได้ไงครับ โดยบินด้วยความเร่งที่ชนะแรง g ของโลก

- บนดาวแต่ละดวง ก็มีค่า g เฉพาะตัว เช่นบนผิวดวงจันทร์ ;

  $$g_{\text{ผิวดวงจันทร์}} \approx \frac{1}{6} \text{ เท่า ของ } g_{\text{ผิวโลก}}$$

  มนุษย์อวกาศจากยาน Apollo 11 จึงกระโดดเล่นบนดวงจันทร์ได้ไงครับ
  เพราะน้ำหนักของเขา หายไป ถึง 6 เท่า !

- ตามนิยามแล้ว มวลจะเป็นค่าคงที่ตลอดกาล ไม่สามารถสร้าง หรือทำให้สูญหายได้
  แต่เปลี่ยนแปลง รูปแบบ สภาพ & สถานภาพ ได้

  เช่น วางน้ำไว้เฉย ๆ น้ำระเหยไปหมด → น้ำหมดไปจากแก้ว แต่เปลี่ยน-
  -สถานภาพ จากของเหลว เป็น gas ∴ มวลของของเหลว กลายเป็นมวล
  ของไอน้ำ แทน

  มวลของน้ำมันดิบ ถูกแปรไปเป็น น้ำมันเบนซิน และถูกเปลี่ยนเป็นก๊าซไอเสีย
  ทีนี้ พอ น้ำมันดิบ ถูกดูดออกมามาก โลกก็กลวง ทำให้โลกต้องสร้างแผ่นดินไหว
  คลื่นสึนามิ วิกฤติสภาพอากาศ เพื่อฆ่ามนุษย์โลกไปซะบ้าง T_T
  โลกจะได้ ไม่เสียสมดุลย์มากเกินไป (อันนี้นอกเนื้อหา แต่เป็นเรื่องจริงครับ)

ยังมีเรื่องน่าสนใจ เกี่ยวกับมวล (mass) อีกมากมาย สามารถศึกษาได้ จากหนังสือวิทยาศาสตร์ และ internet ครับ

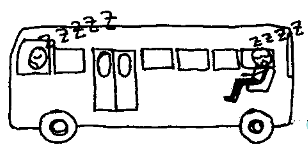
2. เพราะ $\boxed{\text{ความหนาแน่น} = \frac{\text{มวล}}{\text{ปริมาตร}}}$

หรือ กล่าวเปรียบเทียบได้ว่า "หากปริมาตรใด ๆ สองปริมาตร มีขนาดเท่ากันแล้ว ปริมาตรที่มีมวลมากกว่า จะมีความหนาแน่นมากกว่า"

เขียนแล้ว อาจมองไม่เห็นภาพ ลองดูตัวอย่างนะครับ

<u>ปัจจุบันนี้</u> ขสมก. นำรถเมล์สีแดง มาบริการเป็น "รถเมล์เพื่อประชาชน" คือไม่ต้องจ่ายค่ารถเมล์ 7 บาท ต่อเที่ยวแล้ว สังเกตว่า แต่ละคนตั้งหน้าตั้งตา รอขึ้นรถเมล์ฟรี จนรถเมล์ฟรี แน่นมาก แน่นสุด ๆ โปรด สังเกตเวลา และสถานการณ์

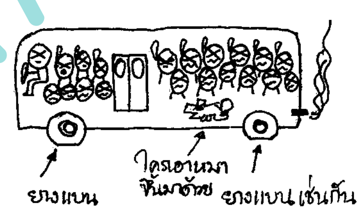
▷ Time = 05 : 00 รถเมล์เที่ยวแรก จะออกจากอู่



บนรถมีคนแค่ 2 คน
คือ คนขับ กับกระเป๋ารถเมล์ นั่งหลับ รอเวลารถออก
รถเมล์ว่างนะครับ อย่างนี้ เขาเรียกว่า "รถโล่ง"
รถโล่ง = รถไม่แน่น = ความหนาแน่นน้อย

เวลาผ่านไป 2-3 ชั่วโมง บริเวณอนุสาวรีย์ ชัยสมรภูมิ
เป็นเวลาที่รถติดสุด ๆ นักเรียนต้องไป รร. , ผู้คนออกไปทำงาน

▷ รถคันเดียวกัน Time = 07 : 45 อนุสาวรีย์ ชัยสมรภูมิ "<u>ไม่เขียวแต่รถไม่ขยับ</u>"



รถเมล์ คันเดียวกัน อัดกันประมาณ 100 คน
แน่นไหมครับ ? นี่แหละครับที่เขาเรียกว่า
"คุณภาพชีวิตคนจน"
= ความหนาแน่นมากสุด ๆ

ทีนี้ เข้าใจเรื่องความหนาแน่น (density , ρ) แล้วนะครับ
น้อง ๆ สามารถ ศึกษาเพิ่มเติมได้ จากหนังสือวิทยาศาสตร์ หรือ internet ครับ

P. 176

<u>คิดเล่นเย็นใจ</u>

ทวีป แอนตาร์กติก อยู่ทางขั้วโลกใต้ นักวิทยาศาสตร์ประมาณว่า 97.6 % ของพื้นทวีปอันกว้างใหญ่ไพศาล ประมาณ 13×10^6 ตารางกิโลเมตร ถูกปกคลุมด้วยน้ำแข็ง ซึ่งมีความหนาเฉลี่ย 5 กิโลเมตร ตลอดปี นักธรณีวิทยาประมาณว่า หากน้ำแข็งที่ปกคลุมทวีปนี้ละลายหมด ระดับน้ำทะเลทั่วโลก จะสูงขึ้น - -ประมาณ 60 เมตร (น้ำท่วมโลก) นั่นหมายความว่า เมืองต่างๆ ที่อยู่ริมฝั่งทะเล จะจมน้ำหมด

ถ้า จะหาปริมาตรของน้ำแข็งของทวีปนี้

<u>วิธีทำ</u> จากรายละเอียดที่โจทย์ กำหนดให้ ข้างต้น

97.6 % ของพื้นทวีป 13×10^6 km^2

$$= \frac{97.6}{100} \times 13 \times 10^6 \quad = 12.688 \times 10^6 \text{ km}^2$$

และมีปริมาตร = พื้นที่ x ความสูง

$$= (12.688 \times 10^6) \times (5)$$

$$= 63.44 \times 10^6 \text{ km}^3$$

<u>ตอบ</u>

- ถ้าน้ำแข็ง ปริมาตร 63.44×10^6 km^3 ละลายหมด แล้วทำให้น้ำทะเลสูงขึ้น 60 m เราจะหาพื้นที่ ที่เป็นน้ำทะเลของโลกได้ จาก ;

$$\text{พท. ผิวน้ำทะเล} \times (60 \times 10^{-3}) = 63.44 \times 10^6$$

$$\text{พท. ผิวน้ำทะเล} = \frac{63.44 \times 10^6}{60 \times 10^{-3}} = 1.057\dot{3} \times 10^9 \text{ km}^2$$

หรือ ประมาณ 1,057 ล้าน ตารางกิโลเมตร

- เมื่อพื้นที่น้ำทะเล = $1.057\dot{3} \times 10^9$ km^2 เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของพื้นผิวโลก

ดังนั้น พื้นที่ผิวโลก $= \dfrac{1.057\dot{3} \times 10^9}{3/4} = 1.057\dot{3} \times 10^9 \times \dfrac{4}{3}$

$= 1.40977 \times 10^9$ หรือ 1,409.77 ล้าน ตาราง - -กิโลเมตร

- เมื่อพื้นผิวโลก $= 1.40977 \times 10^9$ km^2 $= 4\pi r^2$

$\therefore$ รัศมีของโลก หรือ $r = \sqrt{\dfrac{1.40977 \times 10^9}{4\pi}} = 10,589.68433$ km

ซึ่งเลขนี้ มาจากการคำนวณจากโจทย์

ซึ่ง ไม่ตรงกับความเป็นจริงนะครับ นี่แสดงตัวอย่างวิธีคิดให้ดูครับ

<u>ตอบ</u>

" ข้อนี้ คิดเล่น เย็นใจ แต่ ถ้าคิดไม่ได้ ก็เย็นใจไม่ได้เหมือนกันครับ "

P.176 เกาะน้ำแข็ง (Ice Burg)

เมื่อเดือนมกราคม พ.ศ. 2538 M Thomson นักวิทยาศาสตร์สัญชาติอเมริกัน ได้สังเกตเห็นเกาะขนาดใหญ่ในทะเล Larsen จากภาพถ่ายที่ได้จาก-ดาวเทียม NOAA แสดงให้เห็นว่า เกาะน้ำแข็ง แตกตัวจากทวีปน้ำแข็ง โดยมีความหนาถึง 180 m กว้าง 37 km และยาว 77 km โดยประมาณ

นักวิทยาศาสตร์เชื่อว่า เกาะน้ำแข็งนี้เกิดจากอิทธิพล-ของปรากฏการณ์เรือนกระจก (Green House Effect) ทำให้อุณหภูมิเหนือทวีปแอนตาร์กติกอบอุ่นขึ้น + 2.5 °C และมีผลทำให้ปริมาณพืชบนทวีปได้เพิ่มขึ้นจากเดิมถึง 25 เท่า

หากจะคำนวณหา มวลของเกาะน้ำแข็ง ว่ามีประมาณกี่ล้านตัน

วิธีทำ ปริมาตรของเกาะน้ำแข็ง = กว้าง x ยาว x สูง

$$= (37 \times 10^3) \times (77 \times 10^3) \times (180)$$

$$= 512.82 \times 10^9 \quad m^3$$

(เราใช้หน่วย m^3 เพราะต้องการคำนวณกับความหนาแน่น ที่ใช้หน่วย kg/m^3)

แล้ว $\rho = \frac{m}{V}$ โดย $\rho_{\text{น้ำแข็ง}} = 0.917 \times 10^3 \ kg/m^3$

$$m = \rho V$$

$$= (0.917 \times 10^3)(512.82 \times 10^9)$$

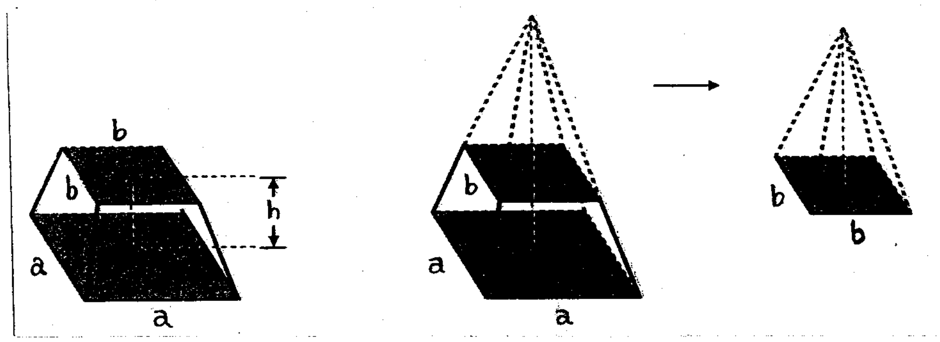
$$= 470.25594 \times 10^{12} \quad kg$$

$$= 470.25594 \times 10^9 \quad Tons$$

$$= 470,255.94 \quad \text{ล้านตัน}$$

ตอบ

พีระมิดยอดตัด และกรวยยอดตัด



โดยทั่วไป เมื่อกำหนดพีระมิดยอดตัด ฐานสี่เหลี่ยมจตุรัส ให้ฐานมีความยาวด้านละ a หน่วย หน้าตัดมีความยาวด้านละ b หน่วย และสูง h หน่วย ตามรูปข้างต้น

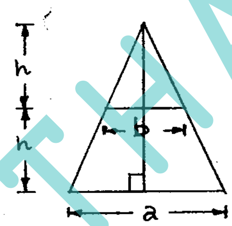
เราสามารถเขียนเป็นสูตรการหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัดฐานสี่เหลี่ยมจตุรัสได้ ดังนี้

ปริมาตรของพีระมิดยอดตัด ฐานสี่เหลี่ยมจตุรัส $= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$

แล้ว ทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้

1. ถ้าใช้ระนาบตัดพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจตุรัสอันหนึ่งในแนวขนานกับฐาน โดยตัดปลายยอดออกครึ่งหนึ่งของความสูงของพีระมิด อัตราส่วนของปริมาตรของพีระมิดส่วนยอด ที่ตัดออกไป ต่อปริมาตรของพีระมิดยอดตัด จะเท่ากับอัตราส่วนใด

วิธีทำ พิจารณา แนวกึ่งกลางของพีระมิด ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



พิจารณา Δ คล้าย ; $\frac{b}{h} = \frac{a}{2h}$

ดังนั้น $b = \frac{a}{2\cancel{h}}\cancel{h} = \frac{a}{2}$

หมายความว่า b ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ a

ปริมาตรของพีระมิดส่วนยอด $= (b)^2 h = \left(\frac{a}{2}\right)^2 h = \frac{1}{4}a^2 h$

ปริมาตรของพีระมิดยอดตัด $= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$

$= \frac{h}{3}\left(a^2 + a\left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{h}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)$

$= \frac{a^2h}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2h}{3}\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{12}a^2h$

ดังนั้น อัตราส่วนของ $\frac{\text{พีระมิดส่วนยอดที่ถูกตัดออกไป}}{\text{พีระมิดยอดตัด}} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{a^2h}}{\frac{7}{12}\cancel{a^2h}} = \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{12}^{3}}{7} = \frac{3}{7}$ ตอบ

2. พิจารณากรวยยอดตัด มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน ยาว 18 cm

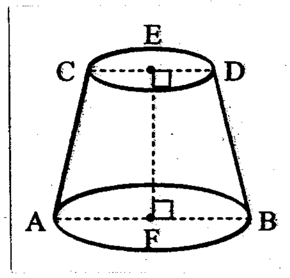
$\overline{CD}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ของส่วนปลายที่ถูกตัด ยาว 6 cm

$\overline{EF}$ เป็นส่วนสูงของกรวยยอดตัด ยาว 12 cm

(กำหนดให้ $\pi \approx 3.14$)

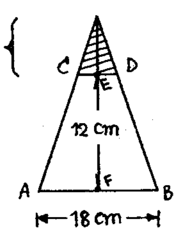
จงหาปริมาตร ของ กรวยยอดตัด

<u>วิธีทำ</u>



เช่นเคย คือพิจารณาภาพตัดที่จุดกึ่งกลางของกรวย ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมยอดตัด แต่เราจะใส่ยอดของสามเหลี่ยมให้ เพื่อให้รูปร่างสมบูรณ์ ส่วนสูงของส่วนที่เพิ่มขึ้นมานั้น เราไม่ทราบ เราจึงแทนค่าด้วย h และหาค่าของ h โดยใช้สามเหลี่ยมคล้าย

ส่วนที่ต่อเติมมา = h cm



$\overline{CD} = 6$ cm ; จากการเปรียบเทียบสามเหลี่ยมคล้ายนั้น

$$\frac{CD}{h} = \frac{AB}{(12+h)}$$

$CD(12+h) = (AB)h$ เมื่อ $AB = 18$ cm และ $\quad = 6$ cm

$6(12+h) = 18(h)$

$72 + 6h = 18h$ หรือ $18h - 6h = 72$

$12h = 72$ ดังนั้น $h = \frac{72}{12} = 6$ cm

เห็นไหมว่า เราสามารถหา h หรือความสูงของยอดกรวยที่ถูกตัดออกไปได้ แม้โจทย์จะไม่ได้ให้มาก็ตาม !

เมื่อเราได้ค่า $h = 6$ cm แล้ว

ปริมาตรของกรวยทั้งหมด = (ปริมาตรส่วนยอด สูง h cm) + ปริมาตรกรวยยอดตัด สูง 12 cm

$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{18}{2}\right)^2(12+h) = \frac{1}{3}\pi(3)^2h +$ ปริมาตรกรวยยอดตัด

∴ ปริมาตรกรวยยอดตัด = ปริมาตรของกรวยทั้งหมด − ปริมาตรกรวยส่วนยอด สูง $h = 6$ cm

$= \frac{1}{3}\pi(9)^2(12+6) - \frac{1}{3}\pi(3)^2$

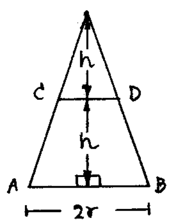
$= \frac{1}{3}\pi\left((9^2)(18) - (3)^2(6)\right)$

$= \frac{1}{3}\pi\left(81(18) - 9(6)\right) = \frac{1}{3}\pi(1404)$

$= 468\pi \approx 468(3.14) \approx 1469.52$ cm^3 <u>ตอบ</u>

3. ถ้าใช้ระนาบตัดกรวยอันหนึ่งในแนวขนานกับฐาน โดยตัดปลายยอดออกครึ่งหนึ่งของความสูงของกรวยอันนี้ อัตราส่วนของปริมาตรของกรวยที่ถูกตัดออกไป ต่อปริมาตรของกรวยยอดตัด จะเท่ากับอัตราส่วนใด

<u>วิธีทำ</u> เพื่อความง่ายในการคำนวณ กำหนดให้กรวยชิ้นเต็มรูป สูง $2h$ หน่วย
เมื่อ $2h$ หน่วย ถูกตัดออกครึ่งหนึ่ง ความสูงของกรวยส่วนยอด และกรวยยอดตัด -
- จะเท่ากันพอดีคือ h หน่วย ในขณะที่ปริมาตรของทั้งสองไม่เท่ากัน



หาความยาว CD โดยทฤษฎีของสามเหลี่ยมคล้าย ;

$$\frac{AB}{2h} = \frac{CD}{h}$$

$$\therefore \quad CD = \frac{(AB)\cancel{h}}{2\cancel{h}} = \frac{1}{2}AB$$

หมายความว่า CD ยาวเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของ AB

ปริมาตรของกรวยที่ถูกตัดออกไป $= \frac{1}{3}\pi(CD/2)^2 h$ เมื่อ $CD = \frac{AB}{2}$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\frac{AB}{2}}{2}\right)^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{AB}{4}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{16}\right)(AB)^2 h$$

$$= \frac{1}{48}\pi(AB)^2 h \quad \text{ลบ.หน่วย}$$

และ ปริมาตรของกรวยยอดตัด $=$ ปริมาตรกรวยสูง $2h$ หน่วย $-$ ปริมาตรกรวยที่ยอดสูง h cm

$$= \frac{1}{3}\pi(AB/2)^2(2h) - \frac{1}{48}\pi(AB)^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{(AB)^2}{\cancel{4}\,2}(\cancel{2}h) - \frac{1}{48}\pi(AB)^2 h$$

$$= \frac{1}{6}\pi(AB)^2 h - \frac{1}{48}\pi(AB)^2 h$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{48}\right)\pi(AB)^2 h$$

$$= \frac{7}{48}\pi(AB)^2 h \quad \text{ลบ.หน่วย}$$

! สังเกตว่า เมื่อแทนค่าด้วยสมการของปริมาตรยอดตัด แล้ว $\Rightarrow \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{h}{3}\left((AB)^2 + (AB)(CD) + (CD)^2\right)$ เมื่อ $CD = \frac{1}{2}AB$

$$= \frac{h}{3}\left(AB^2 + AB\cdot\frac{AB}{2} + \frac{(AB)^2}{4}\right)$$

$$= \frac{h}{3}(AB)^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{h}{3}(AB)^2\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{12}h(AB)^2 \quad \text{ลบ.หน่วย}$$

★ จะเห็นว่า ปริมาตรกรวยยอดตัด จากการคำนวณจริง คือ $\frac{7}{48}\pi(AB)^2 h \neq \frac{7}{12}h(AB)^2$

★★ แสดงว่า สมการ $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$ ใช้ได้กับปิระมิดฐานสี่เหลี่ยมจตุรัสเท่านั้น ไม่ใช่สำหรับกรวย !

ดังนั้น $\dfrac{\text{ปริมาตรของกรวยที่ถูกตัดออกไป}}{\text{ปริมาตรของกรวยยอดตัด}} = \dfrac{\frac{1}{48}\pi(AB)^2 h}{\frac{7}{48}\pi(AB)^2 h} = \frac{1}{48} \div \frac{7}{48} = \frac{1}{\cancel{48}} \times \frac{\cancel{48}}{7} = \frac{1}{7}$

หรือกล่าวได้ว่า ปริมาตรของกรวยที่ถูกตัดออกไป $= \frac{1}{7}$ เท่า ของ ปริมาตรของกรวยยอดตัด <u>ตอบ</u>

4. พีระมิดยอดตัด ฐานสี่เหลี่ยมจตุรัส อันหนึ่งสูง 12 cm ฐานมีความยาวด้านละ 20 cm หน้าตัดมีความยาวด้านละ 15 cm จงหาปริมาตร ของพีระมิดยอดตัดนี้

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากเป็นพีระมิดยอดตัดที่ทราบมิติ (known dimensions)

ดังนั้น ใช้สมการ $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ ได้

จากสมการหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัด $= \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$

$= \frac{12}{3}(20^2 + 20(15) + 15^2)$

$= 4(400 + 300 + 225)$

$= 4 \times 925$

$= 3{,}700 \quad cm^3$ <u>ตอบ</u>

5. กระถางใส่ต้นไม้ มีรูปร่างเป็นพีระมิดยอดตัด ฐานสี่เหลี่ยมจตุรัส ส่วนฐานล่างยาว 20" ปากกระถางยาวด้านละ 30" กระถางมีความสูง 12" ถ้าจะหาปริมาตรจุดินของกระถางใบนี้

ก็สามารถ หาได้จากสมการ $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ เมื่อ $h = 12''$, $a = 30''$ และ $b = 20''$

จะได้ $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{12}{3}(30^2 + 30(20) + 20^2)$

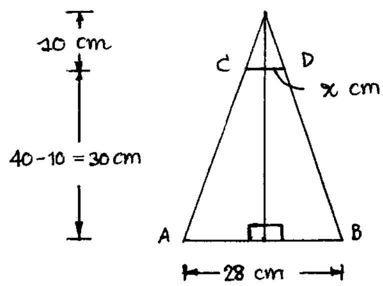
$= 4(900 + 600 + 400)$

$= 4(1{,}900)$

$= 7{,}600$ ลบ.นิ้ว <u>ตอบ</u>

6. กรวยอันหนึ่ง สูง 40 cm รัศมีของฐานยาว 28 cm (ทำให้ $r = 14$ cm) ถ้าใช้ระนาบตัดกรวยให้ขนานกับฐาน และให้ห่างจากจุดยอดกรวย 10 cm จงหาปริมาตรของกรวยยอดตัดนี้ (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาระนาบตรงจุดกึ่งกลางของกรวย ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ฐานยาวเท่ากับฐานกรวย สูง 40 cm



หาค่าของ CD ได้จากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{CD}{10} = \frac{AB}{40}$$

$$CD = AB\frac{(10)}{(40)} = \overset{7}{\cancel{28}}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)$$

$\therefore$ CD ยาว 7 cm

ทำให้ $\frac{CD}{2} = 3.5$ cm

แล้ว ปริมาตรกรวยทั้งหมดสูง 40 cm = ปริมาตรยอดกรวยสูง 10 cm + ปริมาตรกรวยยอดตัด

$\therefore$ ปริมาตรกรวยยอดตัด = ปริมาตรกรวยทั้งหมดสูง 40 cm − ปริมาตรยอดกรวยสูง 10 cm

$$= \frac{1}{3}\left(\pi(14)^2(40) - \pi(3.5)^2(10)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(10)\left(4(14)^2 - (3.5)^2\right)$$

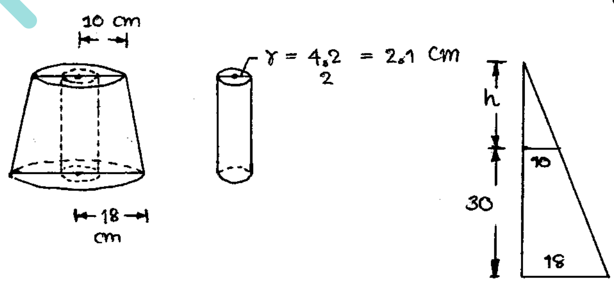
$$= \frac{10}{3}\pi(1212.75)$$

$$= 4{,}042.5\,\pi$$

$$\approx 4{,}042.5\left(\frac{22}{7}\right) \approx 12{,}705 \text{ cm}^3$$ <u>ตอบ</u>

7. จิตรให้ช่างหล่อคอนกรีต เป็นกรวยยอดตัดสำหรับปักร่มขนาดใหญ่ โดยกรวยยอดตัดนี้มีความสูง 30 cm รัศมีของฐานยาว 18 cm และรัศมีของฐานกรวยที่ตัดออกไปยาว 10 cm ถ้าเจาะรูผ่านศูนย์กลางของฐานกรวยมาถึงยอดตัด เป็นรูทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 4.2 cm และมีความสูงเท่ากับความสูงของกรวยยอดตัด แล้ว จงหาปริมาตรของคอนกรีตที่นำมาหล่อกรวยยอดตัดนี้ (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

<u>วิธีทำ</u>



หาค่า h ได้จาก;

$$\frac{h}{10} = \frac{h+30}{18}$$

$$18h = 10h + 300$$

$$8h = 300$$

$$\therefore h = \frac{\overset{75}{\cancel{300}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} = 37.5 \text{ cm}$$

ทำให้ กรวยยอดตัดเต็มลูก = กรวยเต็มลูก − กรวยส่วนยอด

$$= \frac{1}{3}\pi(18)^2(30+37.5) - \frac{1}{3}\pi(10)^2(37.5)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left((18)^2(67.5) - 100(37.5)\right) = \frac{1}{3}\pi\,(\overset{18{,}120}{\cancel{21{,}870 - 3{,}750}})$$

$$= 6{,}040\,\pi$$

ดังนั้น กรวยยอดตัดที่กลวงตรงกลางเป็นรูปทรงกระบอก $= 6{,}040\pi - \pi(2.1)^2(30) = \pi(6{,}040 - 132.3)$

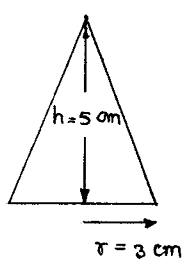
$$= 5{,}907.3\,\pi \approx 18{,}567.057 \text{ cm}^3$$ <u>ตอบ</u>

Thinking Box :

การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติใดๆ โดยวิธี integration ในวิชา Calculus

ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรากำลังศึกษาอยู่นี้ แค่เราสามารถพิจารณาโจทย์ ตั้งสมมุติฐาน และแก้สมการ-ต่างๆได้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ก็นับว่าเป็นงานที่ยากมากแล้ว แต่ในอนาคตอันใกล้นี้ ถ้าน้องๆได้ศึกษาวิชา Calculus ในระดับอุดมศึกษาปีที่ 1 จะรู้ว่าวิธีการ integration ในวิชา Calculus นั้น สามารถช่วยให้เราแก้ปัญหาเหล่านี้ได้เช่นกัน และช่วยได้มากกว่าที่น้องๆ คิดเอาไว้ด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Ex 1 จงหาปริมาตรของกรวย ดังต่อไปนี้



สูตรการหาปริมาตรของกรวยที่เราทราบคือ $= \frac{1}{3}(\pi r^2)h$

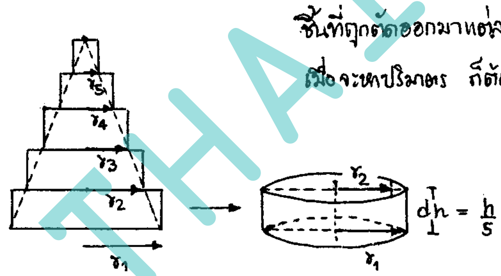
$= \frac{1}{3}(\pi(3)^2)(5)$

$= 15\pi$ cm^3

แต่การทำ integration นั้น เราจะแบ่งรูปทรงนั้นๆ ออกเป็นชิ้นเล็กๆ

ตัวอย่างเช่น เราแบ่งกรวยนี้ออกเป็น 5 ส่วน ดังนี้ ;

ชิ้นที่ถูกตัดออกมาแต่ละชิ้น คือ ทรงกระบอกฐานกลม มีความสูง $dh = \frac{h}{5}$ cm (เพราะแบ่ง h เป็น 5 ส่วน)
เมื่อจะหาปริมาตร ก็ต้องหาปริมาตรทรงกระบอกทั้ง 5 ชิ้น แล้วนำมาบวกกัน

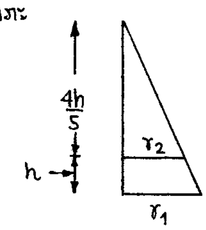


ดังนั้น ปริมาตรทั้งหมด $= \pi r_1^2 \frac{h}{5} + \pi r_2^2 \frac{h}{5} + \pi r_3^2 \frac{h}{5} + \pi r_4^2 \frac{h}{5} + \pi r_5^2 \frac{h}{5}$

$= \pi\left(\frac{h}{5}\right)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2)$

โดย r_2 , r_3 , r_4 และ r_5 เป็น f^n ของ r_1

เพราะ



$\frac{r_1}{h} = \frac{r_2}{\frac{4h}{5}}$ $\therefore r_2 = \frac{\frac{4}{5}\cancel{h}(r_1)}{\cancel{h}}$

$r_2 = \frac{4}{5} r_1$

ทำให้ $r_3 = \frac{3}{5} r_1$, $r_4 = \frac{2}{5} r_1$ และ $r_5 = \frac{1}{5} r_1$

แสดงว่า $V = \pi\left(\frac{h}{5}\right)\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2\right)$ เมื่อ $h = 5$ cm
และ $r_1 = 3$ cm

$$= \pi\left(\frac{5}{5}\right)\left(r_1^2 + \left(\frac{4}{5}r_1\right)^2 + \left(\frac{3}{5}r_1\right)^2 + \left(\frac{2}{5}r_1\right)^2 + \left(\frac{1}{5}r_1\right)^5\right) \text{ โดย } r_1^2 = \left(\frac{5}{5}r_1\right)^2$$

$$= \pi(1)\left(\frac{r_1}{5}\right)^2\left(5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2\right)$$

$$= \pi(1)\left(\frac{3}{5}\right)^2(25 + 16 + 9 + 4 + 1)$$

$$= \pi\left(\frac{9}{\cancel{25}_{5}}\right)(\cancel{55}^{11}) = \pi\left(\frac{99}{5}\right)$$

$$= 19.8\pi \quad cm^3$$

★ จะเห็นว่า $19.8\pi \neq 15\pi$ ซึ่งเป็นคำตอบจริง เพราะการแบ่งแค่ 5 ช่อง เป็นการแบ่งที่หยาบมาก ๆ

★★ <u>แต่น้อง ๆ คิดดูซิครับ ถ้าเราแบ่งกรวยพีระมิดออกเป็น แสน ๆ ล้าน ๆ ชิ้น</u> (จำนวนการแบ่ง → infinity (α))
คำตอบก็จะเข้าสู่ 15π cm^3

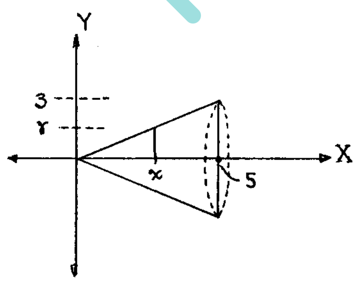
? <u>คำถามคือ</u> ใครจะมานั่งคำนวณการบวก 1,000,000 ตัวเลขเหล่านั้น ?

<u>คำตอบคือ</u> <u>Computer ไงครับ</u> การคำนวณ series ลักษณะนี้ ถ้าเป็น computer สมัย 40 ปีก่อนที่ตัวประมวลผล หรือ processor ยังมีหน่วยความจำและหน่วยประมวลผลที่น้อยมาก ๆ อาจใช้เวลาคำนวณนานมากเป็นวัน ๆ ได้ แต่ processor มาตรฐานของ notebook ทั่วไปในปัจจุบันนี้ แค่เขียน Algorithm code ดี ๆ กด Enter แล้วหายใจ 1 ครั้ง + กะพริบตา 1 ที

~ คำตอบก็ออกมาแล้วครับ ~

! แต่เมื่อ 400 - 500 ปีก่อน computer ไม่มีนี่ครับ นักคณิตศาสตร์สมัยนั้น จึงต้องสร้างเครื่องมือทางความคิดที่มีความแม่นยำสูง เพื่อให้การคำนวณถูกต้อง และใช้เวลาอันสั้น นั่นคือการ Integration

จากโจทย์ข้างต้น เรานำกรวยไปวางให้ความสูงขนานกับแกน X ครับ



สังเกตว่า พิกัดของ (รัศมี , ความสูงของกรวย) คือ (3, 5) และ (r, x)

จากทฤษฎี $\triangle$ คล้ายนั้น ; $\frac{\text{รัศมีกรวย}}{\text{ความสูงกรวย}} = \frac{3}{5} = \frac{r}{x}$

$$\therefore \quad r = \frac{3}{5}x$$

เราจะได้ $r = \frac{3}{5}x$ คือการทำให้ r เป็น $f^{\underline{n}}$ ของ x

ดังนั้น ในแต่ละพื้นที่หน้าตัดนั้น $A(x) = \pi(\text{รัศมี})^2 = \pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2$

note : ที่ ความสูงกรวย 5 cm ค่า $x = 5$ จะได้รัศมี $= \frac{3}{\cancel{5}}(\cancel{5}) = 3$ cm

ดังนั้น $A(x) = \pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2$ จึงเป็นสมการของพื้นที่ฐานในรูปทั่วไปของกรวยอันนี้

ทำให้ได้ปริมาตร (V) ของกรวย $= \int_0^5 A(x)\,dx$ เมื่อ $A(x) = \pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2$

$= \pi(\text{รัศมี})^2$

$$= \int_0^5 \pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2 dx$$

$$= \int_0^5 \pi\left(\frac{9}{25}\right)x^2\,dx = \frac{9}{25}\pi\int_0^5 x^2\,dx$$

$$= \frac{9}{25}\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{9}{25}\pi\left(\frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{25}}\pi\,\frac{(5)\cancel{(5)}\cancel{(5)}}{\cancel{3}_{\,1}}$$

$$= 15\pi \quad cm^3$$

★ จะเห็นได้ว่า คำตอบจากการ integrate ด้วยรูปแบบ $\int_0^5 \pi\left(\frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(\pi(\text{radius})^2\right)h$ ตามที่เคยเรียนเลย

<u>ตอบ</u>

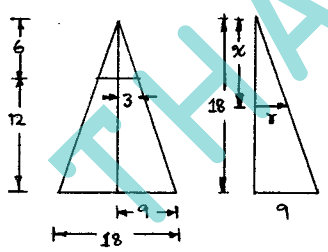
แม้จะเป็นกรวยยอดตัด ก็สามารถทำได้นะครับ

<u>Ex 2</u> จากแบบฝึกหัด ข้อ 2. หน้า 180 ในหนังสือเลขเสริม

คำตอบของปริมาตรพีระมิดยอดตัด $= 468\pi$ cm^3

เราจะหาคำตอบด้วยการ integrate นะครับ

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา กรวยยอดตัด ที่เราหามาแล้วว่า ส่วนยอดกรวยที่หายไปนั้น มีความสูง = 6 cm

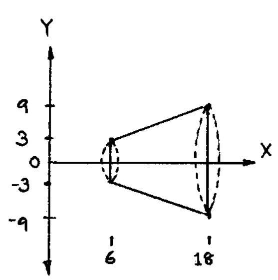


เช่นเดิม จากทฤษฎีสามเหลี่ยมคล้าย ;

$\frac{9}{18} = \frac{r}{x}$ $\therefore r = \frac{9x}{18}$

$r = \frac{1x}{2}$ (ทำให้เป็น f^n ของ x)

ดังนั้น ถ้าจะหาปริมาตรของกรวยยอดตัด ก็ต้อง integrate จาก $x = 6$ ถึง $x = 18$



$$V = \int_6^{18} A(x)\,dx = \int_6^{18} \pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi\int_6^{18} \frac{1}{4}x^2\,dx$$

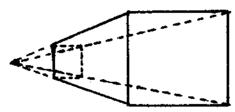
$$= \frac{\pi}{4}\int_6^{18} x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)_6^{18} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{18^3}{3} - \frac{6^3}{3}\right)$$

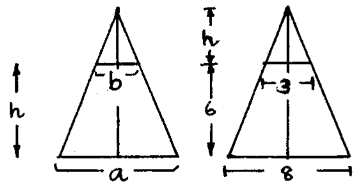
$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{6^3}{3}\right)(3^3 - 1) = \frac{\pi\,(6)\overset{3}{\cancel{(6)}}\overset{2}{\cancel{(6)}}(26)}{\underset{2,1}{\cancel{4}}\;\cancel{3}}$$

$$= (18)(26)\pi = 468\pi \quad cm^3$$ เช่นกัน

<u>ตอบ</u>

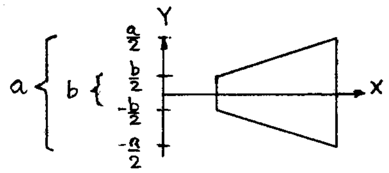
นอกจากนี้ สามารถหาคำตอบของปิระมิดยอดตัดได้เช่นกันครับ





เราเรียนมาว่า ปริมาตรของปิระมิดยอดตัด (V)

มีค่าเท่ากับ $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$



ถ้าโจทย์กำหนดให้ $a = 8$ cm , $b = 3$ cm และ $h = 6$ cm

$$\therefore \text{ ปริมาตรของปิระมิดยอดตัด } = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{6}{3}(8^2 + 8(3) + 3^2)$$

$$= 2(64 + 24 + 9)$$

$$= 2(97) = 194 \text{ cm}^3$$

ทีนี้ เมื่อใช้การ Integrate บ้างล่ะ ; พื้นที่หน้าตัด ตั้งฉากกับความสูง ก็คือ สี่เหลี่ยมจตุรัสนั่นเอง

พื้นที่ ของสี่เหลี่ยมจตุรัส $= (\text{ด้าน})^2 = a^2$ (หรือ b^2 ถ้าตัดระหว่างความสูง h)

สังเกต รูปบนขวาสุด จากทฤษฎีสามเหลี่ยมคล้ายนั้น

$$\frac{8}{h+6} = \frac{3}{h}$$

$$8h = 3(h+6) = 3h + 18$$

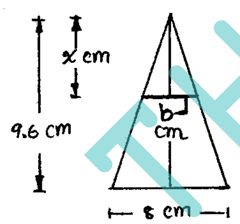
$$8h - 3h = 18$$

$$5h = 18$$

$$\therefore h = \frac{18}{5} \text{ cm}$$

แสดงว่า ปิระมิดสูงจริง ๆ $= 6 \text{ cm} + \frac{18}{5} \text{ cm} = 6 + 3.6 = 9.6$ cm

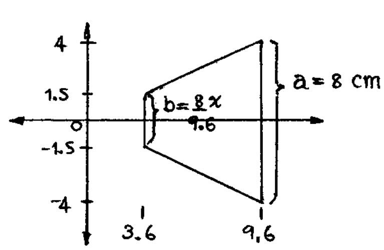
แล้ว ถ้าเราจะหาความยาวด้านที่หน้าตัดใด ๆ (สมการทั่วไป) ล่ะ ให้พิจารณาสามเหลี่ยมคล้ายดังต่อไปนี้



$$\frac{8}{9.6} = \frac{b}{x}$$

ดังนั้น b = ความยาวของด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสใด ๆ ที่เราต้องการพิจารณา

$$\therefore b = \frac{8}{9.6}x \text{ cm}$$



$$\text{Volume} = \int_{3.6}^{9.6} A(x)\,dx = \int_{3.6}^{9.6} \left(\frac{8x}{9.6}\right)^2 dx = \int_{3.6}^{9.6} \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 x^2\,dx$$

$$= \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 \int_{3.6}^{9.6} x^2\,dx = \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg]_{3.6}^{9.6}$$

$$= \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 \left(\frac{(9.6)^3}{3} - \frac{(3.6)^3}{3}\right) = \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)\left((9.6)^3 - (3.6)^3\right)$$

$$= \left(\frac{8}{9.6}\right)^2 \times \frac{1}{\cancel{3}_1} \times (\cancel{884.736 - 46.656}) \quad \cancel{838.08}\ 279.36$$

$= 194$ cm^3 เหมือนคำตอบด้านบน ตอบ

ทำวิธี Integration มา 3 ข้อแล้ว ได้ข้อสังเกตอะไรบ้างครับ ?

1. วิธีที่เราเรียนนั้นง่ายกว่าวิธี Integration เพราะเราจำสูตรตายตัว แล้วนำไปใช้ได้เลย

   เช่น พื้นที่วงกลม = πr^2 , พื้นที่สี่เหลี่ยม = กว้าง x ยาว

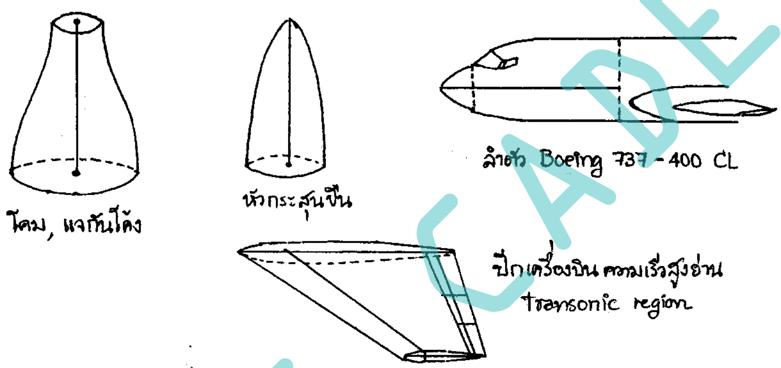
   ถ้าจะหาปริมาตร ก็นำไปคูณ h หรือความสูง บางกรณีก็คูณ $\frac{1}{3}h$ แค่นั้นเอง

★ 2. แต่สังเกตว่า การ integration นั้น เราต้องสร้าง Mathematical Model (เรียกสั้นๆว่า Math Model) คือ A(x) แล้วหาปริมาตร จาก $V = \int_a^b A(x)\,dx$ เมื่อ a = จุดเริ่มต้นการ integrate และ

   b = จุดสิ้นสุดการ integrate

? **ถ้าอย่างนั้น การ integrate มันดีอย่างไร ล่ะครับ**

คำตอบคือ น้องๆ ลองรวบรวม ความรู้ทั้งหมดที่เคยเรียนมา หาปริมาตรของ รูปทรงนี้ ให้หน่อยครับ ^_^



★ เพราะของเหล่านี้ ไม่ใช่ทั้งกรวย และปริซึม ดังนั้น สูตรสมการคณิตศาสตร์แบบธรรมดา ทำไม่ได้แน่นอน แต่ ถ้าเรารู้ A(x) หรือ Math Model ของแต่ละพื้นที่หน้าตัด แล้ว Calculus ทำได้แน่นอน แถม แม่นยำด้วยนะครับ ! อย่าลืมว่า Computer สามารถคำนวณ Math Model ที่ซับซ้อน ด้วยจำนวนวงรอบ (loop) การคำนวณมหาศาล ได้ภายในระยะเวลาอันสั้น

★★ ดังนั้น เพียงเราพิจารณา และตั้ง Math Model ให้ถูกต้อง, เขียน Algorithm Code ให้กับ-โปรแกรม computer แล้วกด Enter แค่นี้คำตอบก็ออกมาแล้วครับ ^_^

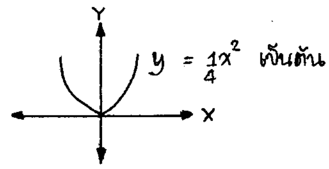
Ex 4 ถ้า Nose Radome Structure (โครงสร้างส่วนจมูกสำหรับติดตั้ง Weather Radar) ของเครื่องบินขับไล่ F-16 FIGHTING FC. ถูกสร้างขึ้นมาด้วยสมการพาราโบลาง่ายๆ 2 ชุด คือ $f(x)$ และ $g(x)$ โดย Radome มีความหนา 5 cm จงหาปริมาตรของ Nose Radome ชิ้นนี้

กำหนดให้ สมการของโค้งนอก คือ $x = \frac{1}{4}y^2$ และระยะ ab = 100 cm

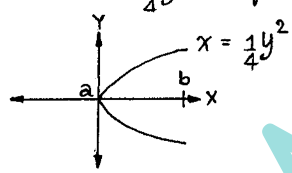
วิธีทำ จากสมการพาราโบลา $x = \frac{1}{4}y^2$

เป็นสมการพาราโบลา ที่แกนสมมาตร ขนานแกน X

เราเคยศึกษา พาราโบลา ที่แกนสมมาตรขนานแกน Y แบบนี้ มาแล้วนะครับ



ดังนั้น สมการ $x = \frac{1}{4}y^2$ จึงมีรูปร่างแบบนี้ครับ ;



จาก $x = \frac{1}{4}y^2$

$\therefore y^2 = 4x$

หรือ $y = \pm\sqrt{4x}$

จะได้ $f(x) = \pm\sqrt{4x}$ ___ (1)

ทีนี้ เรามาพิจารณา geometry ของ Radome เพื่อร่างแบบคร่าวๆ ในพิกัด (x, y) กันครับ

จาก (1) ;

x	0	20	40	60	80	100
y	0	±8.944	±12.65	±15.5	±17.89	± 20

แล้ว ถ้าพิจารณาสมการของชิ้นผิวด้านใน คือสมการ $g(x)$ ซึ่งเรากำหนดให้ radome หนา 5 cm

ดังนั้น $g(x)$ คือสมการในรูปแบบของ $x - 5 = \frac{1}{4}y^2$

$$y^2 = 4(x-5)$$

$$y = \pm\sqrt{4(x-5)}$$

ได้ $g(x) = \pm\sqrt{4(x-5)}$ ___ (2)

นำความสัมพันธ์ใน $g(x)$ มาสร้างเป็นรูปร่างในพิกัด (x, y) ได้เช่นกัน

จาก (2) ;

x	5	20	40	60	80	100
y	0	±7.75	±11.83	±14.83	±17.32	±19.5